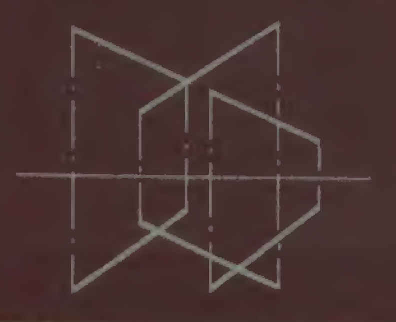
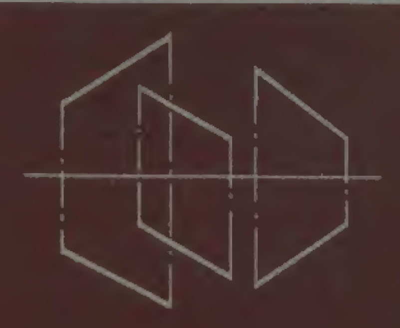
V. O. GORDON
Yu. B. IVANOV Y T. E. SOLNTSEVA

PROBLEMAS DE GEOMETRIA DESCRIPTIVA





EDITORIAL MIR
MOSCU

EN ESTA COLECCIÓN SE HAN SELECCIONADO PROBLEMAS DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA CONFORME AL PROGRAMA PARA LOS CENTROS DE ENSEÑANZA TÉCNICA SUPERIOR DE CONSTRUCCIÓN DE MAQUINARIA, DE CONSTRUCCIÓN DE APARATOS Y MECÁNICO-TECNOLÓGICOS. PUEDE SERVIR DE MATERIAL DIDÁCTICO PARA LOS ESTUDIANTES DE TODAS LAS FORMAS DE ENSEÑANZA, EN PARTICULAR PARA LOS QUE ESTUDIAN POR CORRESPONDENCIA, Y SERÁ DE GRAN UTILIDAD PARA LOS QUE ESTUDIAN DICHO CURSO EN SU TRABAJO INDIVIDUAL. EN ESTE LIBRO SE MUESTRA EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS TIPO QUE ILUSTRAN LOS PRINCIPALES TEOREMAS DEL CURSO, SE EXPONE LA RESOLUCIÓN DETALLADA DE TODA UNA SERIE DE PROBLEMAS.

В. О. ГОРДОН,
Ю. Б. ИВАНОВ, Т. Е. СОЛНЦЕВА

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

V. O. GORDON,
Yu. B. IVANOV y T. E. SOLNTSEVA

PROBLEMAS DE GEOMETRIA DESCRIPTIVA

EDITORIAL MIR MOSCU

TRADUCCIÓN DEL RUSO

(на испанском языке)

Impreso en la URSS
1974

CONTENIDO

PREFACIO

La colección en cuestión de problemas y ejercicios corresponde al programa de Geometría Descriptiva para los Centros de Enseñanza Superior de las especialidades de Construcción de maquinaria, de Construcción de aparatos y Mecánico-tecnológicas.

Esta colección está compuesta en correspondencia y conforme al manual de V. O. Gordon y M. A. Sementsov-Oguiyevski «Curso de Geometría Descriptiva» del cual se han incluido en esta colección toda una serie de ejercicios y problemas.

Los autores de este libro han pretendido ayudar en su trabajo individual a áquellos que estudian el curso mencionado. Esto fue precisamente lo que determinó el carácter del material expuesto, a saber: la demostración del proceso de resolución de toda una serie de problemas tipo, referentes a las cuestiones fundamentales del curso. Al mismo tiempo se dan las condiciones de los problemas para su resolución individual. Los datos de la mayoría de los problemas son similares a los datos de los problemas resueltos, pero hay problemas sin prototipos resueltos, lo que exige de los estudiantes más independencia e iniciativa creadora.

La limitación del curso de Geometría Descriptiva en horas y su estudio, por lo general, en un semestre determina la limitación programática del círculo de cuestiones que se examinan. Evidentemente, éste es el mínimo extremo del que partieron los autores al componer este libro.

En lo fundamental, los problemas resueltos[1] y los propuestos para su resolución se refieren a la combinación mutua de los elementos

[1] Sus números van afectados de una estrellita.

geométricos y su disposición en el espacio y al empleo de los métodos de transformación del dibujo por medio del giro de los planos de proyección y de introducción de planos auxiliares de proyección. Los objetos de estudio son los puntos, líneas rectas y curvas, superficies planas y otras: por separado y en su posición recíproca. Se examinan problemas de determinación de las distancias y los ángulos, de construcción de las proyecciones axonométricas (rectangulares) isométricas y dimétricas (con doble reducción por el eje *y*).

Los dibujos, en lo fundamental, se dan en su ejecución por etapas. Esto facilita su lectura y el examen de la sucesión de su construcción. Para comprender mejor la esencia de la tarea y tener mejor representación del cuadro espacial, en algunos de los problemas resueltos se dan representaciones claras. Se dan también ejemplos de composición del plan de resolución del problema y del análisis de los resultados obtenidos.

Semejantes colecciones de problemas de Geometría Descriptiva con sus resoluciones ya se editaron, por ejemplo, en el año 1928 «Colección de problemas de proyecciones ortogonales con resoluciones detalladas» de S. K. Ruzhentsov y B. A. Ivanov. La experiencia demuestra su utilidad.

La particularidad de esta colección es la existencia de las respuestas de los problemas propuestos para su resolución individual. ¿ Se ha resuelto correctamente el problema? En la mayoría de los casos, al resolver los problemas independientemente, esta pregunta queda abierta, lo cual dificulta el trabajo del estudiante. Para que él mismo pueda convencerse de que el resultado obtenido por él es correcto, en el libro se dan las respuestas. Estas respuestas vienen dadas en forma textual y gráfica en dependencia de las tareas planteadas en el problema. La respuesta del problema en forma de dibujo contiene la posición de los elementos buscados en el fondo de la tarea.

En la colección, en lo fundamental, se dan los dibujos con indicación del eje *x* como base de referencia de las dimensiones al efectuar las construcciones y para la comodidad al dibujar de nuevo las tareas.

La existencia del eje *x* como línea directriz facilita la introducción en el dibujo de cualquier información y la construcción de los dibujos-respuestas. Si el eje *x* no se muestra (como se ha hecho en algunos problemas), su función para la lectura de las dimensiones puede ser atribuida a cualquier recta del dibujo dado. Todo esto se encuentra en relación lógica con los dibujos técnicos, donde siempre existe la base de lectura, aunque no se muestre así como en la Geometría Descriptiva. No obstante, el eje *x* conserva su propio significado de línea de intersección de los planos de proyección *V* y *H*, lo que tiene importancia para representarse mejor el cuadro espacial de la posición que se examina. Pero fuera de este significado (determinado por la denominación de «eje de proyección») esta recta es una componente integrante de todo dibujo para su construcción según las dimensiones dadas. En este caso la elección de la posición del eje no está limitada y se determina a partir de la necesecidad y el carácter racional.

Los autores conservan, en lo fundamental, las designaciones empleadas todavía en el siglo XIX por los científicos rusos N. I. Makárov y V. I. Kurdiúmov y que en la actualidad se emplean sin complicación alguna en los materiales didácticos y en la práctica de las cátedras. Estas designaciones, a diferencia de otras, son en suficiente grado simples, expresivas, fáciles de leer y no recargan los dibujos.

Para comprender mejor los problemas resueltos en esta colección y asimilar las construcciones se recomienda dibujar de nuevo el dibujo inicial y cumplir en él todas las construcciones descritas.

Se debe prestar especial atención al hecho de que para la comparación del dibujo-respuesta, ejecutado por los estudiantes, del problema propuesto para su resolución independiente con la respuesta dada en el libro, es necesario reproducir lo más exactamente posible el dibujo-tarea, valiéndose del eje *x* como base de lectura. Si se desea, el dibujo-tarea puede ser ampliado, cosa que se debe tener en cuenta al comparar la respuesta obtenida con la del libro.

Al resolver los problemas que no tienen prototipos resueltos, se puede hacer uso de las indicaciones breves que se dan al final del libro.

La expresión *representar en forma intuitiva* significa construir la representación en la proyección dimétrica frontal oblicua (aunque sea en la conocida bajo el nombre de «proyección de gabinete»).

Durante la resolución independiente de los problemas se recomienda hacer el dibujo de la construcción necesaria y componer el plan de resolución, así como se hace en el libro para algunos de los problemas resueltos, y solamente después de esto efectuar la construcción.

La concordancia de esta colección de problemas con el manual de V. O. Gordon y M. A. Sementsov-Oguiyevski «Curso de Geometría Descriptiva» no excluye la posibilidad de utilizar otros manuales, puesto que para comprender y resolver los problemas propuestos en este libro, se exigen los conocimientos de aquellos teoremas y tesis que deben contenerse en cualquier manual.

Para las líneas de referencia se emplea una línea de puntos y rayas con un punto entre las rayas vecinas. Pero si la línea de referencia se ha trazado sólo para verificar la corrección de la construcción, entonces se usa una línea con dos puntos.

Los números de los problemas resueltos van afectados de una estrellita. Las respuestas de los problemas no resueltos se dan al final del libro.

Algunos signos convencionales dados en el libro:

⊥ — perpendicular;

∥ — paralelo;

≡ — coincide;

⊾ — ángulo recto.

I
CAPÍTULO
PUNTO Y RECTA

§ 1. EL PUNTO

1*. Dar las representaciones claras de los puntos A, B, C y D respecto de los planos V y H. Los puntos están dados por sus proyecciones (fig. 1, *a*).

Solución. Los puntos a_x, b_x, c_x y d_x (fig. 1, *b*) se eligen en el eje x arbitrariamente. Por encontrarse el punto A en el segundo cuadrante (la Z-coordenada del punto es positiva y la ordenada es negativa), el segmento a_xa, que corresponde al valor de la ordenada, se traza a la izquierda del plano V. El segmento a_xa', que corresponde al valor de la Z-coordenada, se traza por arriba del plano H.

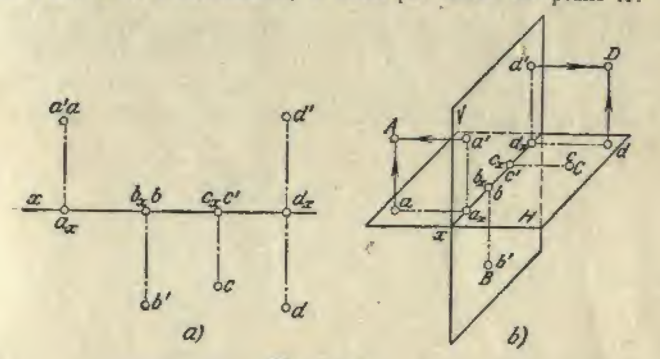


Fig. 1a, b.

Al construir el punto D, situado en el primer cuadrante (la Z-coordenada y la ordenada son positivas), el segmento d_xd se traza a la derecha del plano V, y el segmento d_xd', por arriba del plano H.

Las posiciones de los puntos A y D se han obtenido en la intersección de las perpendiculares levantadas de los puntos a y d (al plano H) y de los puntos a' y d' (al plano V).

El punto B se encuentra en el plano V; esto se deriva de que la proyección horizontal b de este punto está situada (fig. 1, *a*) sobre el eje x (la ordenada es igual a cero). Por consiguiente, en la fig. 1, *b* el punto b se confunde con b_x. El segmento b_xb',

que corresponde al valor negativo de la Z-coordenada, se traza por abajo del plano H. La posición del propio punto B coincide con la posición de su proyección frontal b'.

El punto C está situado sobre el plano H; esto se deriva de que la proyección c' se encuentra (fig. 1, a) sobre el eje x (la Z-coordenada del punto C es igual a cero). Por esta razón también en la fig. 1, b c' se confunde con c_x.

Por ser la ordenada del punto C positiva, el segmento c_xc, correspondiente a esta ordenada, se traza (fig. 1, b) a la derecha del plano V. La posición del propio punto C coincide con la posición de su proyección horizontal c.

2. Representar claramente las posiciones de los puntos A, B, C, D y E, dados por sus proyecciones (fig. 2).

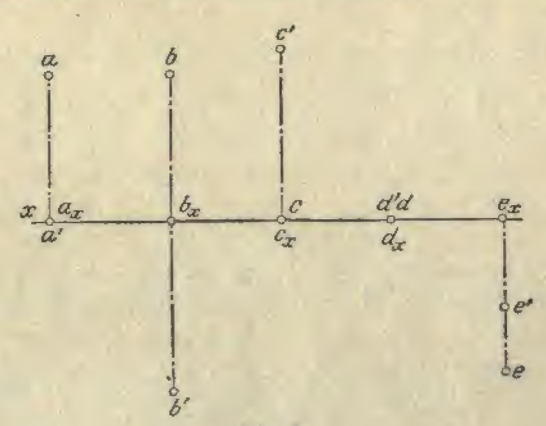


Fig. 2.

3*. Construir las proyecciones de los puntos A y B con auxilio de sus coordenadas. Construir la proyección del punto C, situado simétricamente al punto A respecto del plano frontal de proyección. Representar claramente la posición de estos puntos respecto de los planos V y H.

Punto	Coordenada	
	y	z
A	13,5	20
B	6,5	—20

Solución. Señalamos el eje x (fig. 3, a) y sobre éste el punto a_x. Puesto que el punto A se encuentra en el primer cuadrante (sus Z-coordenada y ordenada son positivas), la proyección a' está situada sobre el eje x a la distancia 20, y la proyección a, bajo el eje x a la distancia 13,5.

Para construir las proyecciones del punto B, primeramente, elegimos arbitrariamente (sobre el eje x) el punto b_x y a partir de éste trazamos, hacia abajo, el segmento b_xb, igual al valor de la ordenada (6,5), y el segmento b_xb', correspondiente al valor negativo de la Z-coordenada (—20). El punto B se encuentra en el cuarto cuadrante.

El punto C deberá estar situado simétricamente al punto A respecto del plano V. Por consiguiente, la ordenada del punto C es igual a —13,5, y la Z-coordenada, igual a 20. El punto c_x se confunde con el punto a_x y c' con a', y la proyección horizontal c se encuentra por arriba del eje x a la distancia 13,5.

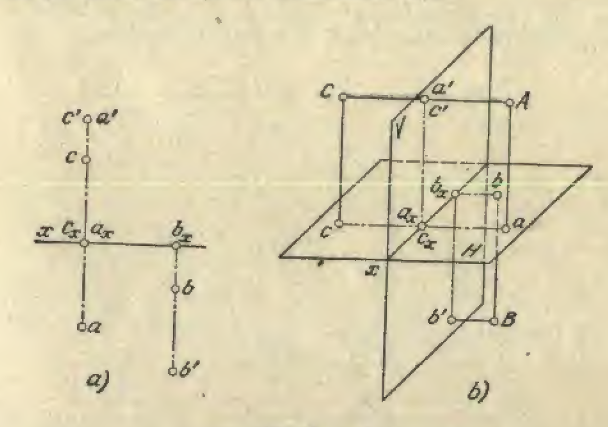


Fig. 3 a, b.

En la fig. 3, b se da la representación clara correspondiente de las posiciones de los puntos A, B y C. La distancia a_xb_x en la fig. 3, b es igual a la mitad de la distancia a_xb_x en la fig. 3, a.

4. Construir las proyecciones de los puntos A, B y C valiéndose de sus coordenadas. Construir la proyección del punto D, dispuesto simétricamente al punto C respecto del eje x. Representar claramente las posiciones de estos puntos respecto de los planos V y H.

Punto	Coordenada	
	y	z
A	—25	0
B	—20	20
C	—30	—20

5*. Construir tres proyecciones de cada uno de los puntos A y B con ayuda de sus coordenadas.

Punto	Coordenada		
	x	y	z
A	13,5	16,5	20
B	33,5	—26,5	—13,5

Solución. Para construir las proyecciones del punto A, que se encuentra en el primer octante (fig. 4, *a*), llevamos al eje x (fig. 4, *b*) el segmento Oa_x, igual al valor de la abscisa (13,5). La proyección a' se encontrará encima del eje x a la distancia 20, y la proyección a, bajo el eje x a la distancia 16,5. La proyección de perfil a'' se encuentra a un mismo nivel que a' (fig. 4, *a* y *b*) a la distancia $a''a_z$, igual al valor de la ordenada del punto A (16,5), a la derecha del eje z.

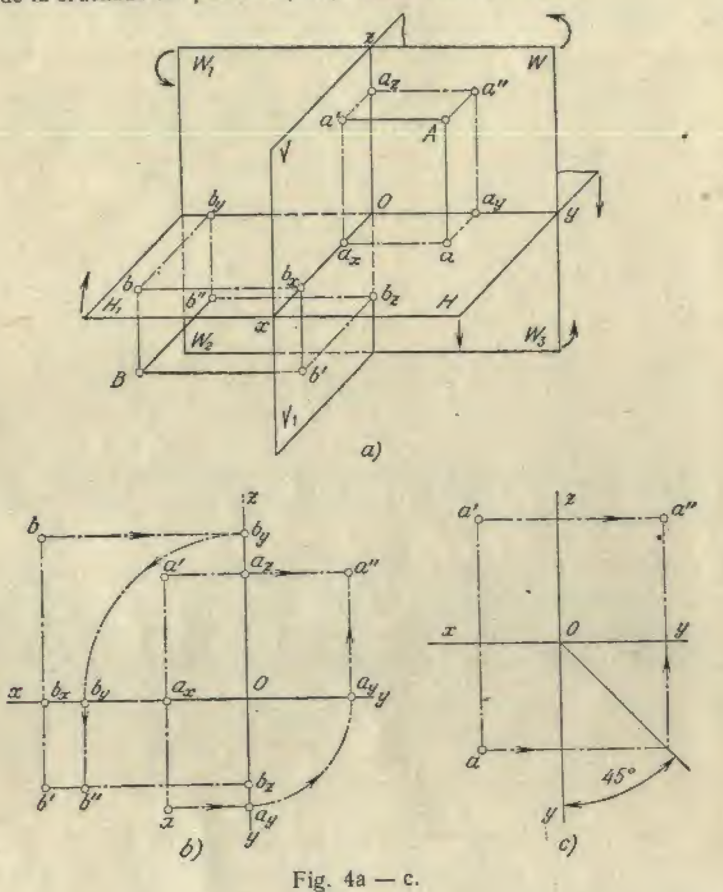


Fig. 4a — c.

Para construir las proyecciones del punto B llevamos sobre el eje x el segmento Ob_x, igual a 33,5. Por encontrarse el punto B en el tercer octante (fig. 4, *a*), el punto b' está situado bajo el eje x a la distancia 13,5, y el punto b, encima del eje x a la distancia 26,5. El punto b'' se dispone a un mismo nivel con el punto b' a la izquierda del eje z a la distancia b_zb'' (26,5) de éste. En la fig. 4, *c* se muestra el procedimiento de construcción de la proyección de perfil del punto A con ayuda de una recta auxiliar trazada desde el punto O bajo un ángulo de 45° al eje y.

§ 2. LA RECTA

6*. Representar claramente la posición del segmento AB respecto de los planos V y H. El segmento está dado por sus proyecciones (fig. 5, *a*).

Solución. Determinamos la posición de los puntos extremos del segmento, así como se mostró en el problema 1*. El segmento AB queda determinado por los puntos A y B (fig. 5, *b*).

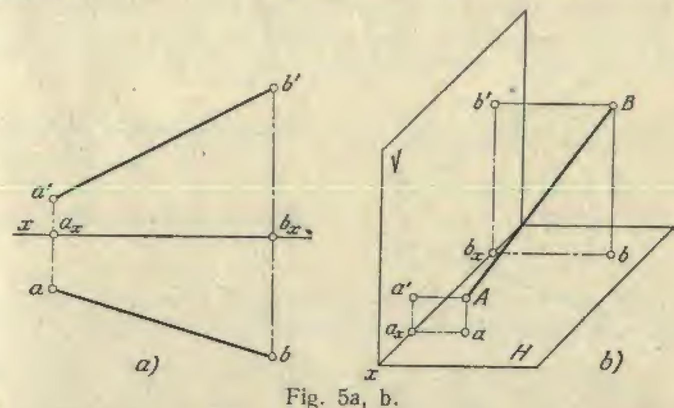


Fig. 5a, b.

7. Representar claramente las posiciones de los segmentos AB y CD respecto de los planos V y H. Los segmentos están dados por sus proyecciones (fig. 6, *a* y *b*).

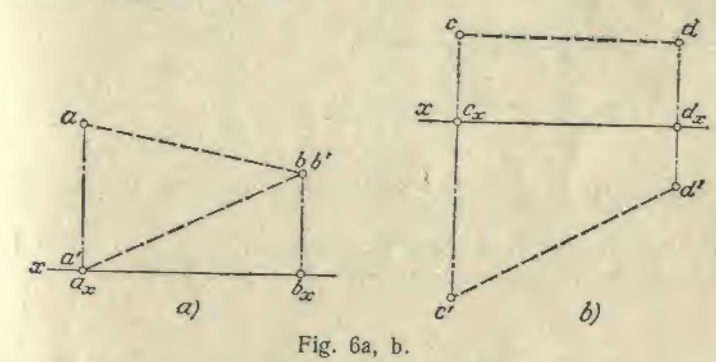


Fig. 6a, b.

8. Construir el dibujo del segmento AB si éste:

a) se encuentra en el primer cuadrante del espacio, es paralelo al plano V, y con su extremo B se apoya en el semiplano horizontal anterior;

b) está situado en el plano bisector del cuarto cuadrante, y con su extremo B se apoya en el eje de proyección;

c) se encuentra en el segundo cuadrante del espacio paralelamente al plano V, con su extremo B se apoya en el semiplano horizontal posterior, y el extremo A equidista de los planos V y H;

d) está situado arbitrariamente en el semiplano vertical inferior, y con su extremo B se apoya en el eje de proyección;

e) se encuentra en el cuarto cuadrante del espacio paralelamente al plano H, y su extremo B equidista de los planos de proyección;

f) está situado en el tercer cuadrante del espacio perpendicularmente al plano V, y con su extremo A se apoya en el semiplano vertical inferior;

g) está situado en el cuarto cuadrante del espacio perpendicularmente al plano H, y su extremo A equidista de los planos de proyección.

9. Leer los dibujos de los segmentos representados en la fig. 7, *a—d*.

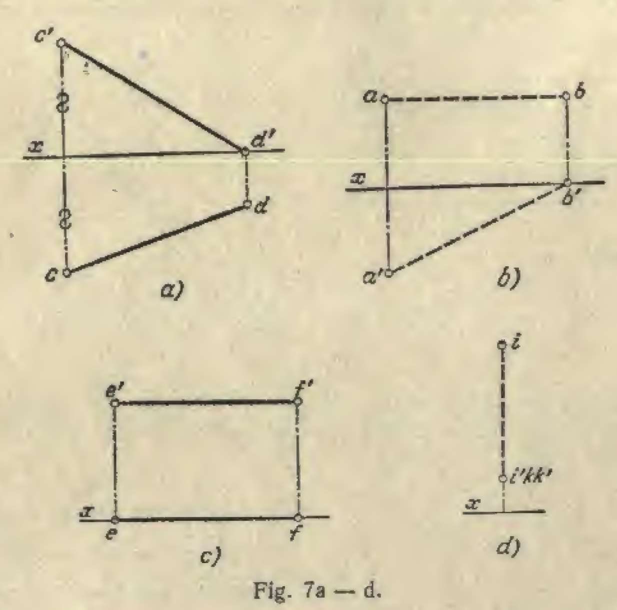


Fig. 7a — d.

§ 3. POSICIÓN RECÍPROCA DE UNA RECTA Y UN PUNTO

10*. Determinar si se encuentran los puntos B y C sobre la recta AD, y el punto K sobre la recta MN (fig. 8, *a* y *b*).

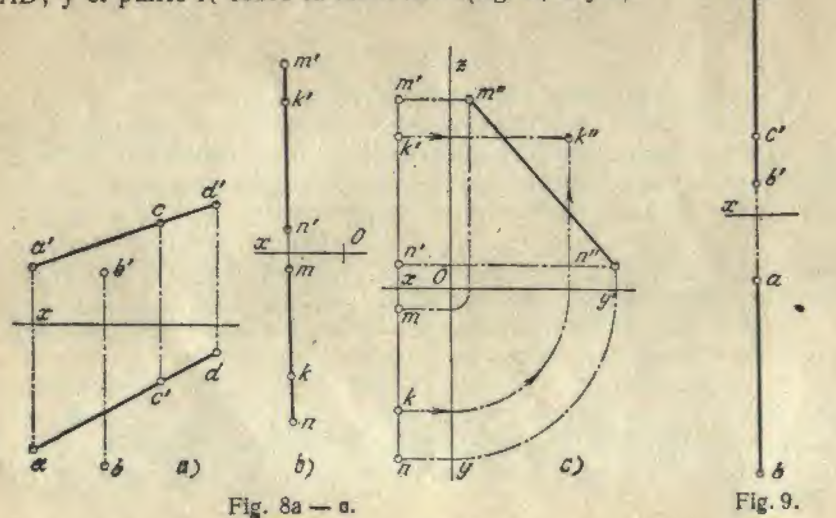


Fig. 8a — c. Fig. 9.

Solución. Puesto que las proyecciones b y b', y c y c' (fig. 8, *a*) no se encuentran en las proyecciones homónimas a éstas de la recta AD, los puntos B y C no se encuentran sobre esta recta.

Para determinar si está situado el punto K sobre la recta MN (fig. 8, *b*), construimos las proyecciones de perfil del punto K y de la recta MN (fig. 8, *c*). El punto K no pertenece a la recta MN, puesto que su proyección de perfil k'' no se encuentra sobre la proyección de perfil $m''n''$.

11. Construir la proyección horizontal del punto C, perteneciente a la recta AB (fig. 9).

§ 4. TRAZAS DE UNA RECTA

12*. Construir las trazas de una recta que pasa por los puntos A y B (fig. 10, *a*), e indicar por cuáles cuadrantes del espacio pasa esta recta.

Solución. Trazamos las proyecciones $a'b'$ y ab de la recta AB.

Para construir su traza horizontal prolongamos (fig. 10, *b*) la proyección frontal $a'b'$ hasta su intersección con el eje x en el punto (m'), que es la proyección frontal

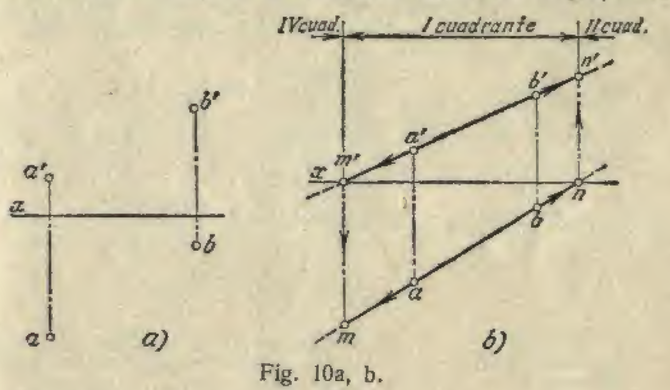


Fig. 10a, b.

de la traza horizontal de la recta. Luego, trazamos desde el punto m' una perpendicular al eje x (la línea de referencia) hasta su intersección con la prolongación de la proyección horizontal de la recta en el punto (m), que es la proyección horizontal de la traza horizontal de la recta. El punto m se confunde con la propia traza horizontal (el punto M).

Para construir la traza frontal de la recta prolongamos su proyección horizontal ab hasta su intersección con el eje x en el punto (n), que es la proyección horizontal de la traza frontal de la recta. Desde el punto n levantamos una perpendicular al eje x hasta su intersección con la prolongación de la proyección $a'b'$ en el punto (n'), que es la proyección frontal de la traza frontal de la recta. El punto n' coincide con la propia traza frontal de la recta (el punto N). De la disposición de las proyecciones m' y m, y n' y n se desprende que el punto M (la traza horizontal de la recta) se encuentra en el semiplano horizontal anterior, y el punto N (la traza frontal de la recta), en el semiplano vertical superior. Por consiguiente, la recta pasa por el segundo, primero y cuarto cuadrantes del espacio.

13. Construir las trazas de una recta determinada por los puntos A y B (fig. 11, *a* y *b*), e indicar a través de cuáles cuadrantes del espacio ella pasa.

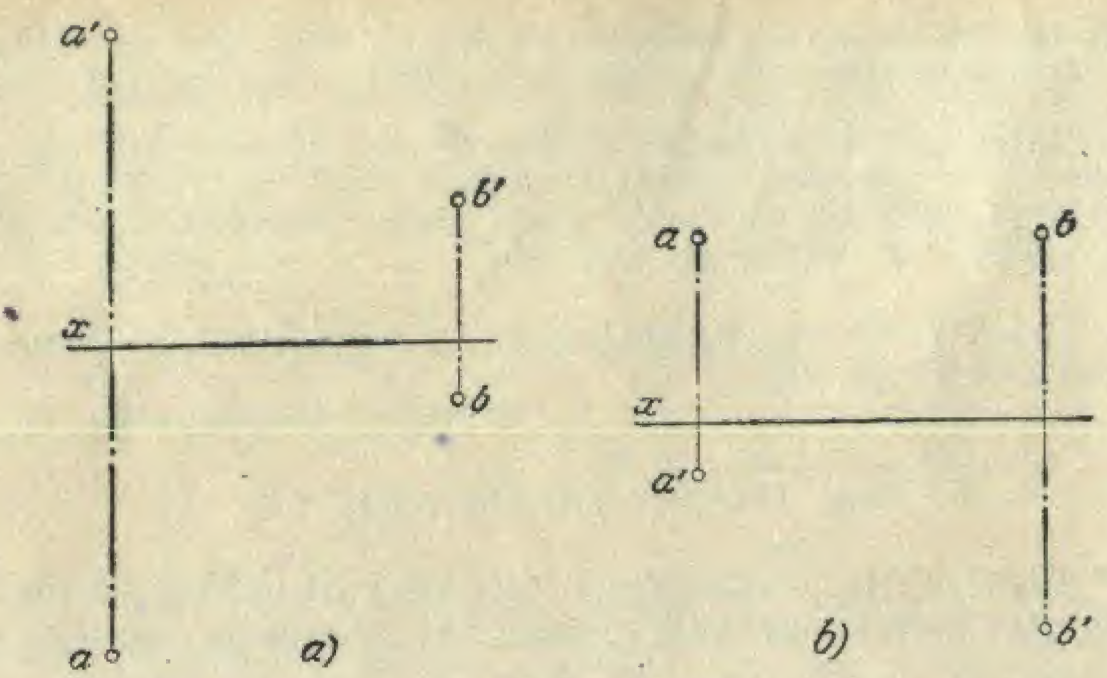


Fig. 11a, b.

14*. Construir las trazas de la recta de perfil AB (fig. 12, *a*) e indicar a través de cuáles cuadrantes del espacio ella pasa.

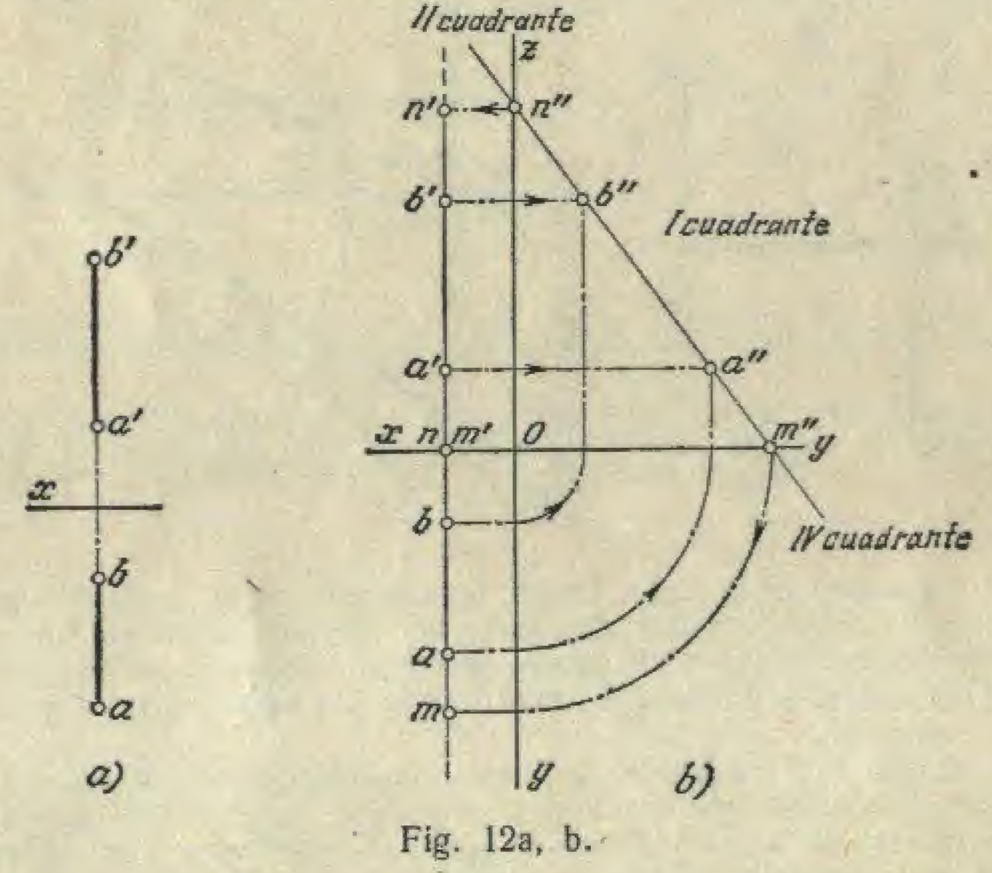


Fig. 12a, b.

Solución. De la construcción (fig. 12, *b*) se desprende que la proyección horizontal n de la traza frontal de la recta y la proyección frontal m' de la traza horizontal se confunden en el punto de intersección de las proyecciones de la recta con el eje x. Para construir los puntos m y n' hallamos primeramente las proyecciones de perfil m'' y n''. Para ello prolongamos la proyección de perfil $a''b''$ hasta su intersección con los ejes z e y. Una vez obtenidas las proyecciones m'' y n'' hallamos m y n'.

De la disposición de las proyecciones m y m', y n y n' se deriva que el punto M (la traza horizontal de la recta) se encuentra en el semiplano horizontal anterior, y el punto N (la traza frontal de la recta) está situado en el semiplano vertical superior. La recta atraviesa el segundo, primero y cuarto cuadrantes.

15. Construir las trazas de la recta AB (fig. 13) y representar claramente sus posiciones.

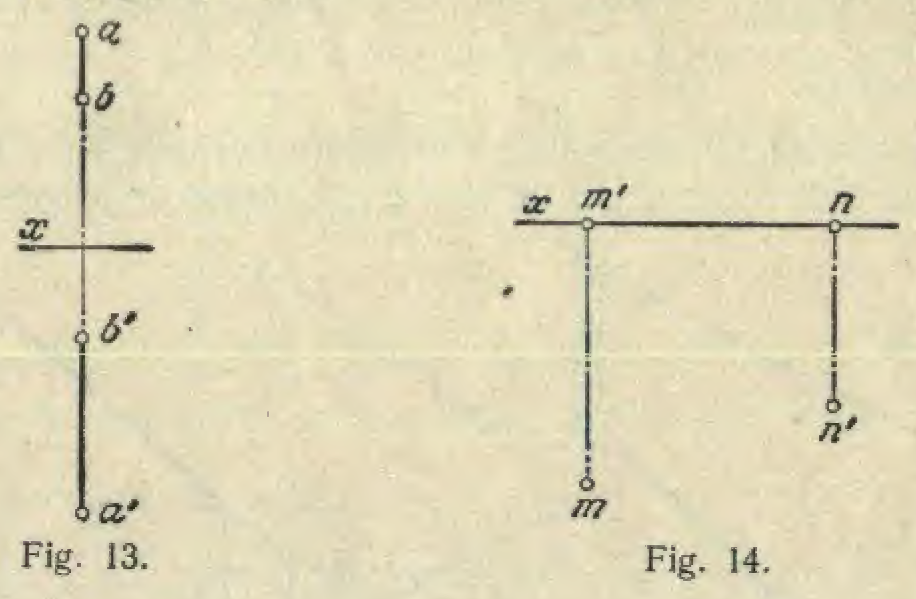


Fig. 13. Fig. 14.

16. Construir las proyecciones de una recta, conociendo la posición de las proyecciones de sus trazas (fig. 14) e indicar a través de cuáles cuadrantes del espacio ella pasa.

§ 5. MAGNITUD VERDADERA DEL SEGMENTO DE UNA RECTA Y ÁNGULOS DE INCLINACIÓN DE UNA RECTA A LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

17*. Hallar la magnitud verdadera del segmento de la recta AB, dado por sus proyecciones, y determinar los ángulos de inclinación de esta recta a los planos V y H (fig. 15).

Solución. Como es conocido, la magnitud verdadera del segmento puede ser determinada como la magnitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es la proyección del segmento sobre cualquiera de los planos de proyección, y el otro, la diferencia entre las distancias de los extremos del segmento hasta este mismo plano. Si uno de los catetos es la proyección horizontal entonces el ángulo entre la hipotenusa y este cateto es igual al ángulo de inclinación (α) de la recta al plano horizontal de proyección. El ángulo de inclinación (β) de esta recta al plano frontal de proyección se determina del triángulo, en el que en calidad de primer cateto se ha tomado la proyección frontal del segmento, y el segundo cateto se ha determinado por la diferencia de las distancias de los extremos del segmento hasta el plano frontal de proyección.

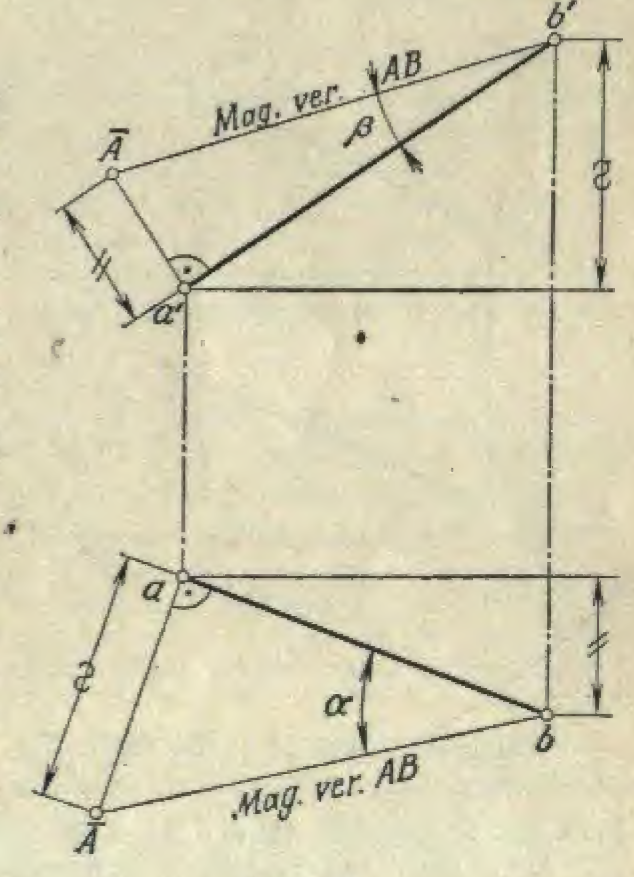


Fig. 15.

Para determinar la magnitud verdadera del segmento AB y de los ángulos α y β,

en la fig. 15 se han construido los triángulos rectángulos $ba\bar{A}$ y $b'a'\bar{A}$. En el triángulo $ba\bar{A}$ el cateto $a\bar{A}$ es igual a la diferencia entre las distancias de los puntos A y B hasta el plano horizontal de proyección. En el triángulo $b'a'\bar{A}$ el cateto $a'\bar{A}$ es igual a la diferencia entre las distancias de los puntos A y B hasta el plano frontal de proyección.

18. Determinar la magnitud verdadera del segmento AB (fig. 16) y los ángulos de inclinación de éste a los planos de proyección.

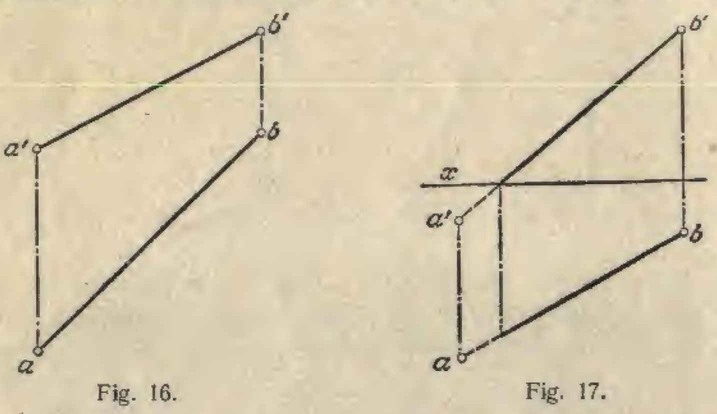


Fig. 16. Fig. 17.

19. Determinar la magnitud verdadera del segmento de una recta dada entre sus trazas frontal (N) y horizontal (M) y los ángulos de inclinación de esta recta a ambos planos de proyección (fig. 17).

20*. Llevar sobre una recta dada el segmento AB, igual a l (fig. 18, *a*).

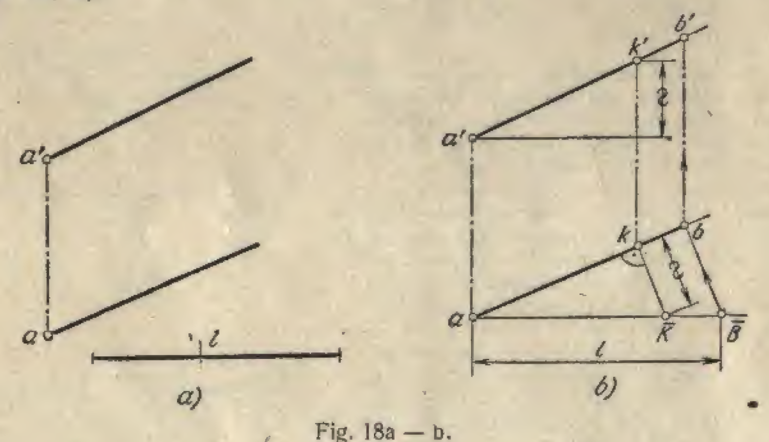


Fig. 18a — b.

Solución. Sobre la recta dada (fig. 18, *b*) tomamos el segmento arbitrario $A\bar{K}$ y determinamos su magnitud verdadera. Construimos el triángulo rectángulo con los catetos ak y $k\bar{K}$, igual a la diferencia entre las distancias de los puntos A y K hasta el plano H. Llevamos a la hipotenusa del triángulo construido el segmento $a\bar{B}$

de longitud dada l. Desde el punto $\bar{B}$ trazamos una recta paralela a $k\bar{K}$. Obtenemos el punto b y la proyección horizontal ab del segmento buscado AB, igual a l. Con ayuda del punto b hallamos el punto b'; $a'b'$ es la proyección frontal del segmento buscado AB.

21. Llevar sobre la recta AB (fig. 19) el segmento AC igual a l.

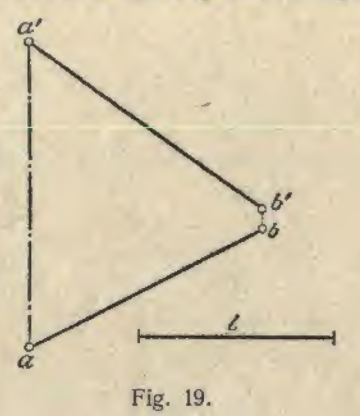


Fig. 19.

22*. Trazar en el primer cuadrante por el punto A (fig. 20, *a*) una recta que forma con el plano H un ángulo $\alpha = 30°$ y con el plano V un ángulo $\beta = 45°$.

Solución. Se debe verificar la condición: cada uno de los ángulos (α y β) debe ser agudo, y la suma de estos ángulos debe ser o bien menor de 90° (para una recta de posición general), o bien igual a 90° (para una recta de perfil). Según los datos del problema $\alpha+\beta=30°+45°=75°$, es decir, es menor de 90°. Por consiguiente, la construcción se puede efectuar.

Con los ángulos α y β ya nos encontramos en el problema 17*. Si elegimos un segmento cualquiera AB de recta y lo aceptamos como hipotenusa de cierto triángulo rectángulo, entonces, conociendo los ángulos α y β, se pueden construir dos triángulos semejantes (fig. 20, *b*). En uno de ellos (con el ángulo α) el cateto $A — 1$ expresa la proyección horizontal del segmento AB, y el cateto $B — 1$, la diferencia entre las distancias de los extremos del segmento AB hasta el plano H; en el otro triángulo (con el ángulo β) el cateto $A — 2$ expresa la proyección frontal del segmento AB, y el cateto $B — 2$, la diferencia entre las distancias de los extremos del segmento hasta el plano V.

Ahora se puede construir el dibujo (fig. 20, *c*).

Trazamos en la línea de referencia $a'a$, a partir del punto a' hacia abajo, el segmento $a' — 3$ igual al cateto $B — 1$ hallado en la fig. 20, *b*. Por el punto 3 trazamos una recta perpendicular a la línea de referencia $a'a$, y desde el punto a' describimos un arco de circunferencia, cuyo radio debe ser igual al cateto $A — 2$ (fig. 20, *b*). En la intersección de la recta y el arco obtenemos el punto b'.

Para construir el punto b llevamos sobre la línea de referencia $a'a$, a partir del punto a hacia abajo, el segmento $a — 4$, igual al cateto $B — 2$ (fig. 20, *b*), trazamos por el punto 4 una recta perpendicular a la línea de referencia $a'a$ y hallamos en ésta el punto b.

Con tal construcción la proyección ab (fig. 20, *c*) deberá obtenerse igual al cateto $A — 1$ (fig. 20, *b*).

Claro está que se puede obtener, con los mismos datos, tres posiciones más del segmento AB; los dibujos correspondientes se muestran en la fig. 20, *d*. En realidad, la construcción no se diferenciaría de la expuesta en la fig. 20, *c*.

23. Trazar por el punto A (fig. 21), a la derecha y hacia abajo, una recta, que forme con el plano H un ángulo $\alpha = 15°$ y con el plano V un ángulo $\beta = 30°$, hasta su intersección con el plano V.

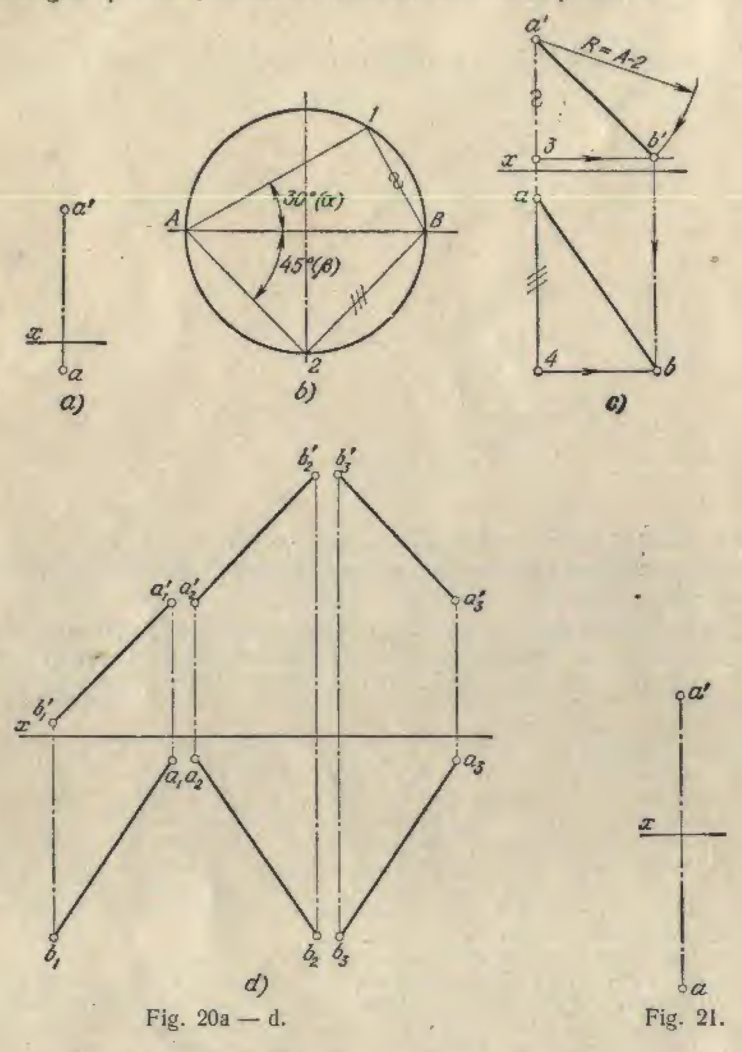


Fig. 20a — d. Fig. 21.

§ 6. DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN LA PROPORCIÓN DADA

24*. Dividir el segmento AB por el punto C en la proporción $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$ (fig. 22, *a*).

Solución. Puesto que la división de un segmento en una proporción cualquiera corresponde a la misma división de sus proyecciones, dividimos (fig. 22, *b*) la proyección *ab* (se podía también comenzar por la proyección frontal) en 5 partes. Para ello trazamos por el punto *a* una recta arbitraria y marcamos sobre ella cinco segmentos cualesquiera iguales entre sí. El punto *5* lo unimos con el punto *b*. Por el punto *3* trazamos una recta, paralela a la recta *b — 5*, hasta su intersección con *ab* en el punto *c*. Con ayuda del punto *c* construimos la proyección *c'*. En el punto C el segmento AB ha sido dividido en la proporción 3 : 2, contando desde el punto A.

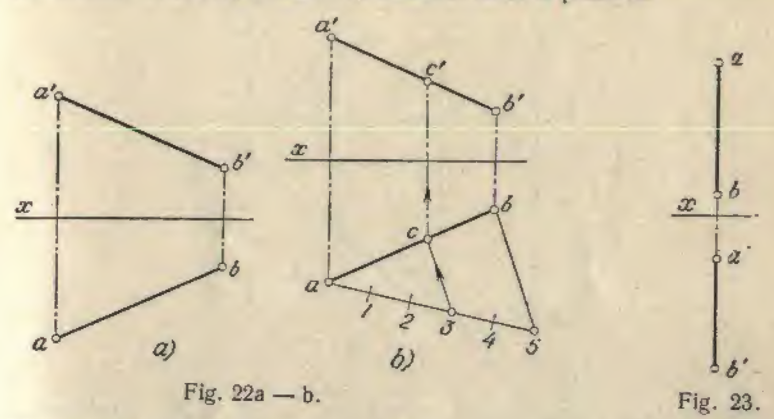


Fig. 22a — b. Fig. 23.

25. Viene dado el segmento AB (fig. 23). Hallar el punto C que divide la distancia entre las trazas frontal (N) y horizontal (M) de una recta en la proporción $CM : CN = 1 : 3$.

§ 7. POSICIÓN RECÍPROCA DE LAS RECTAS

26*. Cortar a las rectas AB y CD (fig. 24, *a*) con la recta MN que se encuentra a la distancia l del plano de proyección H.

Solución. De acuerdo con los datos del problema, la recta buscada debe ser paralela al plano H. Por consiguiente, su proyección frontal es paralela al eje de proyección x y se encuentra a la distancia l de éste. Trazamos (fig. 24, *b*) la proyección

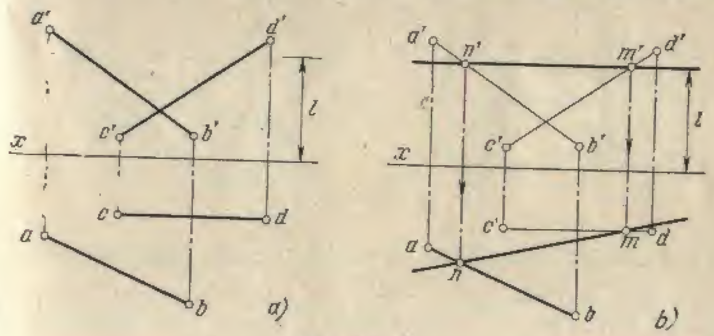


Fig. 24a, b.

frontal de la recta buscada y señalamos los puntos n' y m' de su intersección con las proyecciones homónimas de las rectas dadas. Construimos las proyecciones horizontales n y m sobre *ab* y *cd* respectivamente y trazamos la proyección horizontal *mn* de la recta buscada.

27. Cortar a las rectas AB y CD (fig. 25) con una recta paralela al plano de proyección V y que se encuentra a la distancia l de éste.

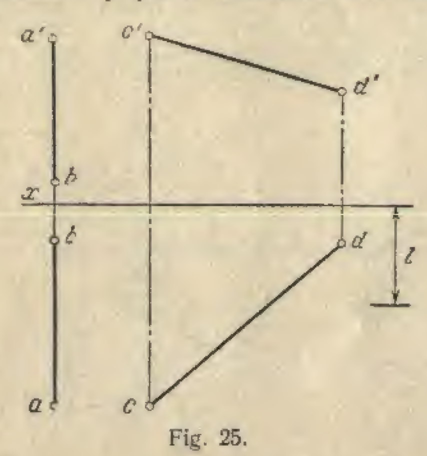


Fig. 25.

28*. Trazar por el punto E (fig. 26, *a*) una recta que corte a las rectas dadas AB y CD.

Solución. La recta buscada ha de cumplir tres condiciones:
1) pasar por el punto E, 2) cortar a la recta AB, 3) cortar a la recta CD. Por eso, en el dibujo (fig. 26, *b*): 1) las proyecciones de la recta han de pasar por las correspondientes proyecciones del punto E;

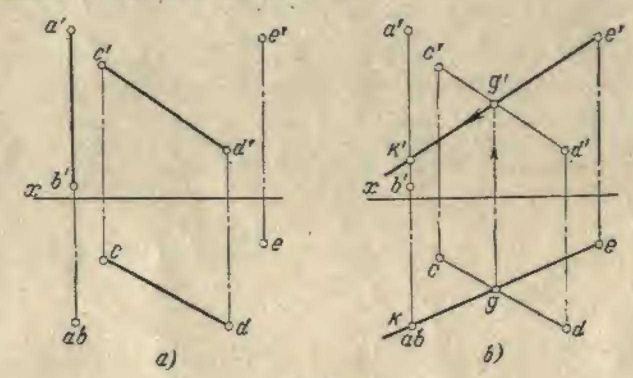


Fig. 26a, b.

2) la proyección horizontal de la recta buscada debe pasar por un punto que es la proyección horizontal de la recta AB;
3) los puntos de intersección de las proyecciones de la recta buscada con las proyecciones homónimas de la recta CD han de encontrarse en una misma perpendicular al eje de proyección.
Comenzamos la construcción de la recta buscada trazando su proyección horizontal por los puntos e y a (*b*).
Señalamos el punto de intersección con cd (el punto g), hallamos sobre $c'd'$ el punto g' y trazamos por g' y e' una recta, que será la proyección frontal de la recta buscada.

Los puntos k' y k serán las proyecciones del punto de intersección de la recta buscada con la recta AB.

29. Intersecar las rectas AB, CD y EF (fig. 27) con una recta paralela al plano de proyección H.

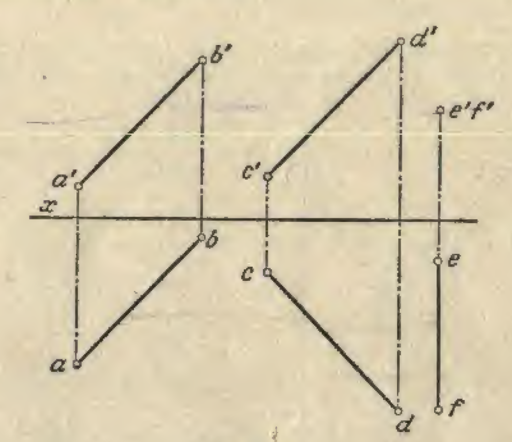


Fig. 27.

30. Trazar por el punto C una recta que corte a la recta AB y al eje de proyección x (fig. 28, *a* y *b*).

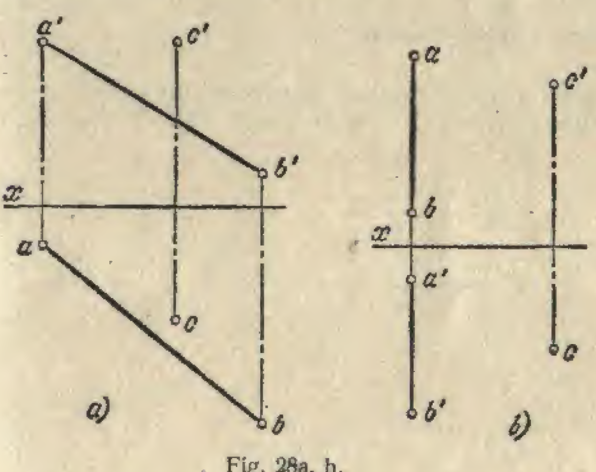


Fig. 28a, b.

Observación. Se debe tener en cuenta que el eje de proyección x se proyecta sobre el plano de perfil de proyección en un punto, que coincide con el origen de coordenadas (el punto O).

§ 8. CONSTRUCCIÓN DE LAS PROYECCIONES DE UN ÁNGULO RECTO

31*. Trazar desde el punto *C* una perpendicular a la recta *AB* (fig. 29, *a*, donde *AB*||al plano *V*).

Solución. Es conocido, que el ángulo recto se proyecta sobre el plano en forma de ángulo recto en el caso en que uno de sus lados es paralelo al plano de proyección, y el otro corta a este plano bajo un ángulo agudo.

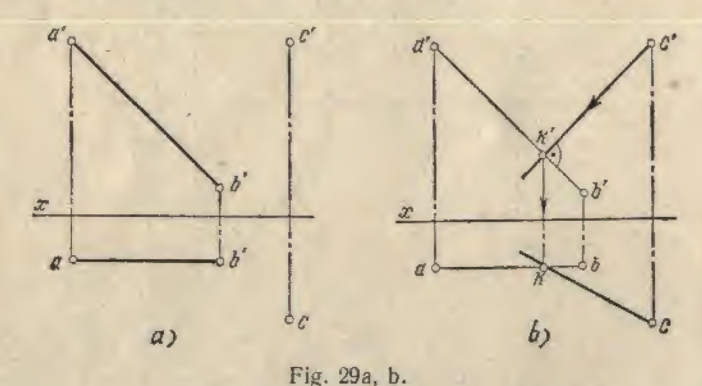


Fig. 29a, b.

En el caso dado (fig. 29, *a*) la recta *AB* es paralela al plano *V*. Por esta razón, se puede trazar por el punto *c'* (fig. 29, *b*) una recta perpendicular a *a'b'* y hallar las proyecciones del punto *K*, en el que *CK* corta a *AB*. Obtenemos las proyecciones *c'k'* y *ck* de la perpendicular buscada.

32. Trazar desde el punto *C* una recta perpendicular a la recta *AB*: 1) *AB*||al plano *H* (fig. 30, *a*), 2) *AB*||*al* plano *W* (fig. 30, *b*).

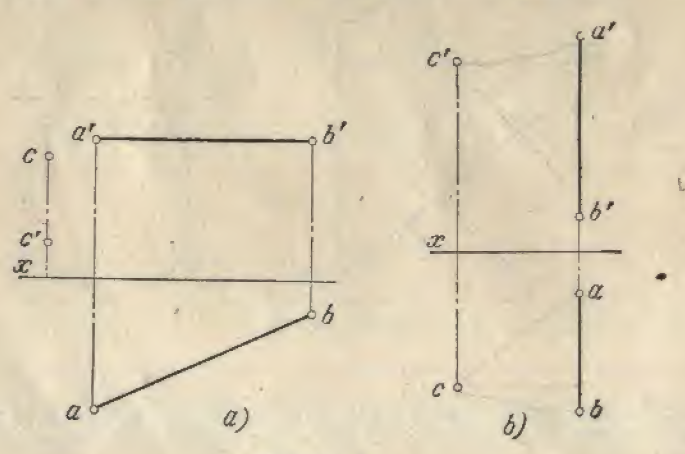


Fig. 30a, b.

33*. Intersecar las rectas *AB* y *CD* (fig. 31, *a*) con una tercera recta perpendicular a las mismas, es decir, hallar la distancia más corta entre las rectas que se cruzan *AB* y *CD*, una de las cuales (la *CD*) es perpendicular al plano de proyección *H*.

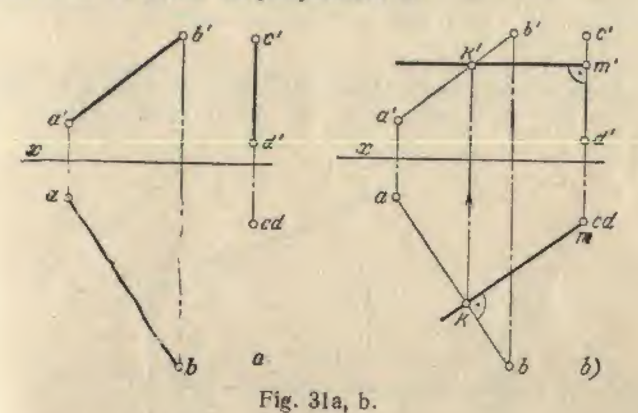


Fig. 31a, b.

Solución. Por ser la recta *CD* perpendicular al plano *H*, cualquier perpendicular a esta recta será paralela al plano *H*. Por esta razón, el ángulo recto formado por la recta buscada con la recta *AB* se representa sobre el plano *H* en forma de ángulo recto. La proyección horizontal del punto de intersección de la recta buscada con la recta *CD* (el punto *m*) se confunde con *c* (*d*) (fig. 31, *b*). Trazamos por el punto *m* la proyección horizontal de la recta perpendicularmente a *ab* hasta su intersección con ella en el punto *k* y hallamos *k'*. La proyección frontal de la recta buscada (*k'm'*) está situada paralelamente al eje *x*.

34*. Construir el rombo *ABCD*, conociendo que el segmento *BD* es una de sus diagonales (*BD*||*al* plano *V*), y que el vértice *A* debe estar sobre la recta *EF* (fig. 32, *a*).

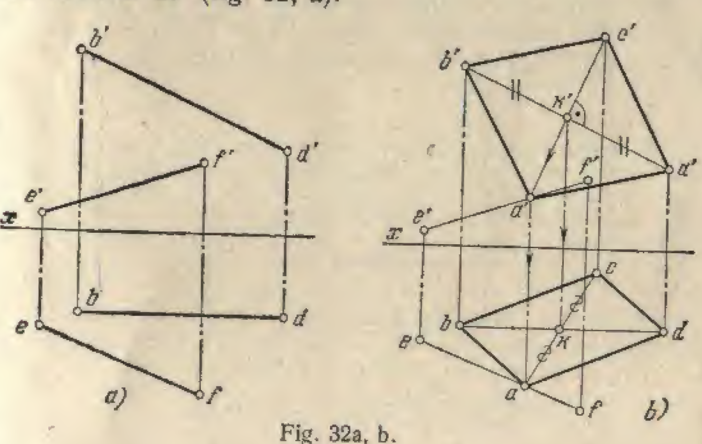


Fig. 32a, b.

Solución. Las diagonales del rombo son perpendiculares entre sí y en el punto de su intersección se dividen por la mitad. Por esta razón, dividimos (fig. 32, *b*) las proyecciones de la diagonal *BD* por la mitad. Dado que *BD*||al plano *V*, desde

el punto k' trazamos una perpendicular a la recta $b'd'$. Esto responde a las reglas de construcción de las proyecciones de un ángulo recto sobre un plano respecto al cual la diagonal BD es paralela. El punto de intersección de esta perpendicular con la proyección $e'f'$ es la proyección frontal a' del vértice buscado del rombo A. Para construir el punto c' trazamos en la prolongación de la recta $a'k'$ el segmento $k'c'$, igual al segmento $a'k'$. Con auxilio del punto a' construimos sobre ef el punto a. Lo demás está claro del dibujo.

35. Construir el triángulo isósceles ABC, cuya base es igual a BC (BC||al plano H). El vértice A ha de encontrarse sobre la recta EF (fig. 33).

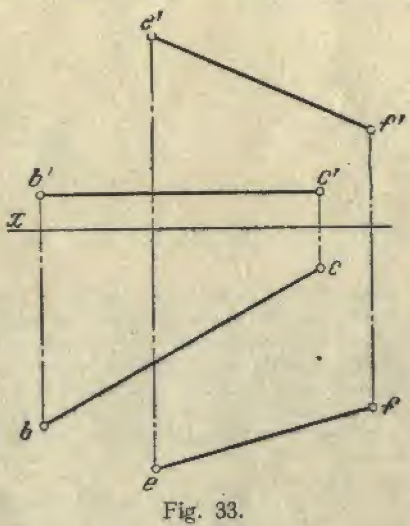


Fig. 33.

36. Construir el triángulo rectángulo ABC, en el cual el cateto AB se encuentra sobre la recta MN (MN||al plano V) y es igual a l. Para el cateto BC está dada su proyección bc (fig. 34).

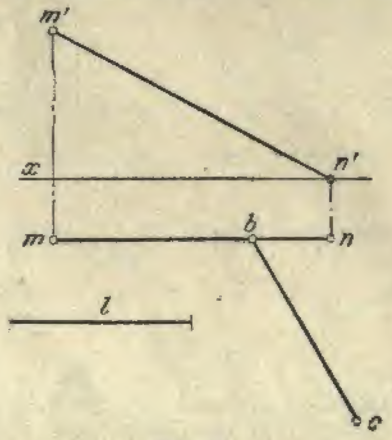


Fig. 34.

37*. Construir un triángulo isósceles de base BC sobre la recta MN (MN||al plano H) y cuyo vértice A está situado sobre la recta EF (fig. 35, a). La base BC ha de ser igual a la altura AK del triángulo, con la particularidad de que está dada la proyección horizontal del punto K.

Solución. Para construir el triángulo hay que hallar su altura AK y llevar la mitad de su magnitud sobre la recta MN a ambos lados del punto K. En la fig. 35, b,

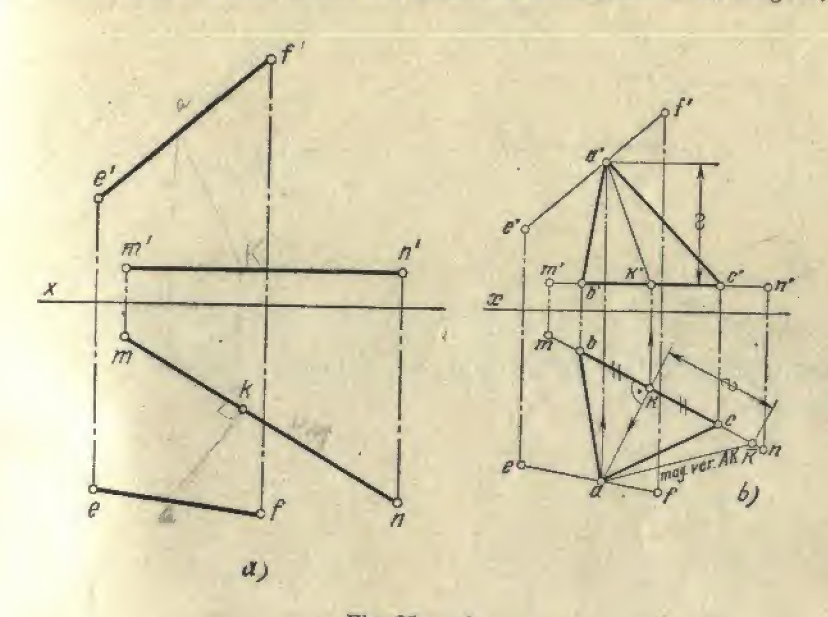


Fig. 35a — b.

con ayuda del punto k construimos el punto k'. En el punto k levantamos la perpendicular a la recta mn (el ángulo recto entre la altura AK y la base BC, que se encuentra sobre MN, se representa sobre el plano de proyección H en forma de ángulo recto, puesto que la recta MN es paralela al plano H). Prolongamos esta perpendicular hasta su intersección con ef. Con ayuda del punto a construimos a' sobre $e'f'$; obtenemos la proyección frontal de la altura AK.

Ahora se puede hallar la magnitud verdadera de la altura AK. Para ello construimos el triángulo rectángulo $ak\bar{K}$, cuyo cateto $k\bar{K}$ es igual a la diferencia entre las distancias desde los puntos A y K hasta el plano H. La hipotenusa $a\bar{K}$ expresa la altura AK. Al llevar sobre la recta mn los segmentos kb y kc, iguales a la mitad de la altura AK (es decir, a la mitad del segmento $a\bar{K}$), obtenemos los puntos b y c y con su ayuda las proyecciones b' y c'. Lo demás está claro del dibujo.

38. Construir el cuadrado $ABCD$ con el lado BC sobre la recta MN, que es paralela al plano V (fig. 36).

39. Construir el triángulo rectángulo ABC con el cateto BC sobre la recta MN ($MN \parallel$ al plano H). Está dada la proyección a' b' del

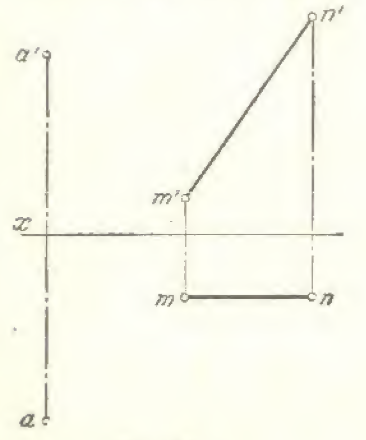


Fig. 36.

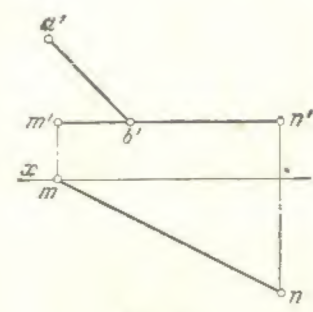


Fig. 37.

cateto AB. El cateto BC ha de ser 1,5 vez mayor que el cateto AB (fig. 37).

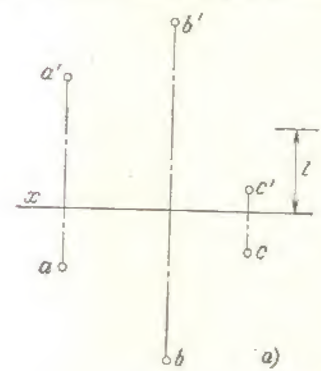
II

CAPÍTULO

EL PLANO

§ 9. PUNTO Y RECTA EN EL PLANO

40*. En el plano, dado por los puntos A, B y C, trazar una horizontal a la distancia l del plano de proyección H (fig. 38, *a*).



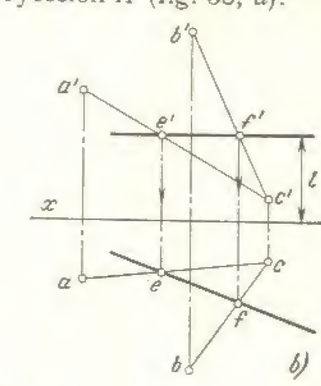


Fig. 38a, b.

Solución. Pasamos de la definición del plano por tres puntos a su definición por dos rectas AC y BC (fig. 38, *b*). Trazamos la proyección frontal de la horizontal buscada a la distancia l del eje x. Señalamos los puntos e' y f' sobre las proyecciones $a'c'$ y $b'c'$ y hallamos las proyecciones e y f sobre ac y bc. La proyección horizontal de la recta buscada pasa por los puntos e y f.

41. Trazar por el punto C la horizontal del plano dado por la recta AB y el punto C (fig. 39).

42*. En el plano, dado por las rectas que se cortan AB y CD, trazar por el punto K la frontal (fig. 40, *a*).

Solución. Puesto que la dirección de la proyección horizontal de la frontal es conocida, comenzamos la construcción con el trazado de esta proyección por el punto k: la recta km ha de ser paralela el eje x (fig. 40, *b*). Para construir la proyección

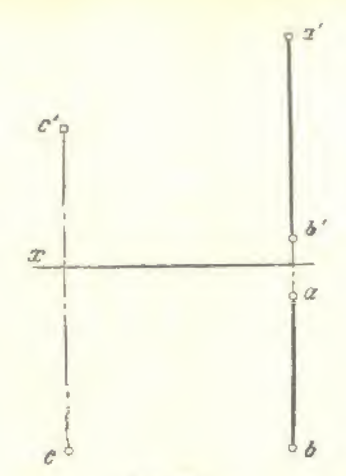


Fig. 39.

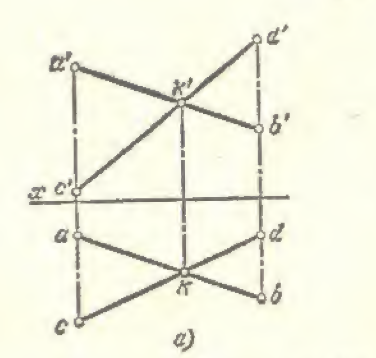


Fig. 40a — b.

frontal de la frontal buscada hay que construir la proyección frontal de un punto cualquiera perteneciente a la frontal. Elegimos en la proyección de la frontal un punto arbitrario *e*, trazamos por él la proyección horizontal *cf* de cierta recta perteneciente al plano dado. Construimos a continuación el punto *f'* sobre la recta *a' b'*, trazamos *c' f'* y hallamos sobre esta última el punto *e'*. La proyección frontal de la frontal buscada pasa por los puntos *k'* y *e'*.

43. En el plano, dado por las rectas paralelas *AB* y *CD*, trazar la frontal a la distancia *l* del plano de proyección *V* (fig. 41).

44*. En el plano, dado por la recta *AB* y el punto *C*, trazar por el punto *A* la recta de máxima pendiente de este plano (fig. 42, *a*).

Solución. Como es sabido, la recta de máxima pendiente es perpendicular a cualquier horizontal del plano. La proyección horizontal de la recta de máxima pendiente y la proyección horizontal de la horizontal son perpendiculares entre sí. En la fig. 42, *b* se ha trazado la horizontal por el punto *C*, primero se ha obtenido el punto *d'*, y con ayuda de éste, el punto *d* en la prolongación de la proyección *ab*. De este modo, se ha obtenido la proyección *cd* de la horizontal *CD*. Trazamos por el punto *a*

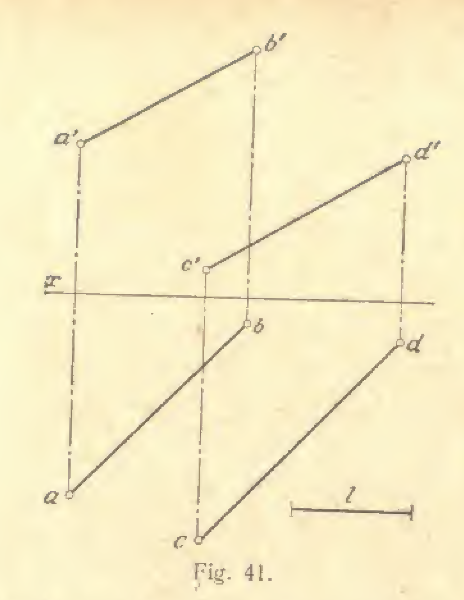


Fig. 41.

la proyección horizontal de la recta de máxima pendiente hasta su intersección con la recta *cd* en el punto *e*, hallamos *e'* sobre *c' d'* y la proyección *a' e'* de la recta de máxima pendiente buscada.

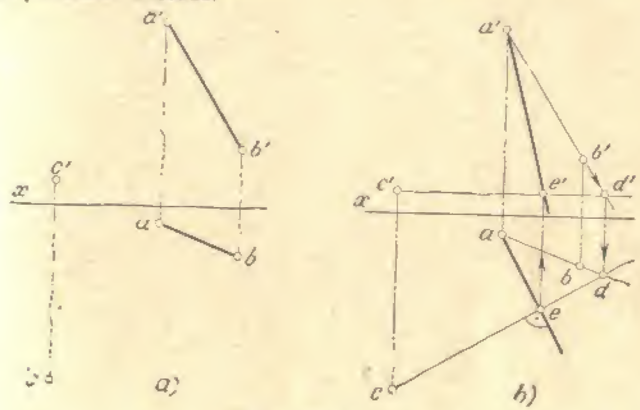


Fig. 42a, b.

45. En el plano, dado por las rectas paralelas *AB* y *CD*, trazar por el punto *B* la recta de máxima pendiente (fig. 43).

46*. Hallar la proyección que falta del punto *K* perteneciente al plano dado por la recta *AB* y el punto *C* (fig. 44, *a*).

Solución. Es conocido, que si un punto pertenece a un plano, entonces pertenecerá a cierta recta situada en este plano. Por eso, por los puntos *c'* y *к'* (fig. 44, *b*) trazamos la proyección frontal de una recta auxiliar situada sobre el plano dado. Obtenido el punto *d'*, hallamos el punto *d* sobre la proyección *ab*. Ahora trazamos una recta desde el punto *c* por el punto *d* y sobre esta recta hallamos la proyección horizontal del punto *K*.

Fig. 43.

Fig. 44a, b.

Fig. 45.

47. Construir la proyección que falta del triángulo *KEF*, situado en el plano dado por las rectas paralelas *AB* y *CD* (fig. 45).

48. Construir la proyección frontal del pentágono plano *ABCDE*, si están dadas la proyección horizontal del pentágono y las proyecciones frontales de dos de sus lados adyacentes (fig. 46).

49. Está dada la pirámide *SABC* (fig. 47).

1) Hallar la proyección horizontal del punto *K* situado en la cara *SAC*.

2) Hallar la proyección frontal del punto *E* situado en la cara *SBC*.

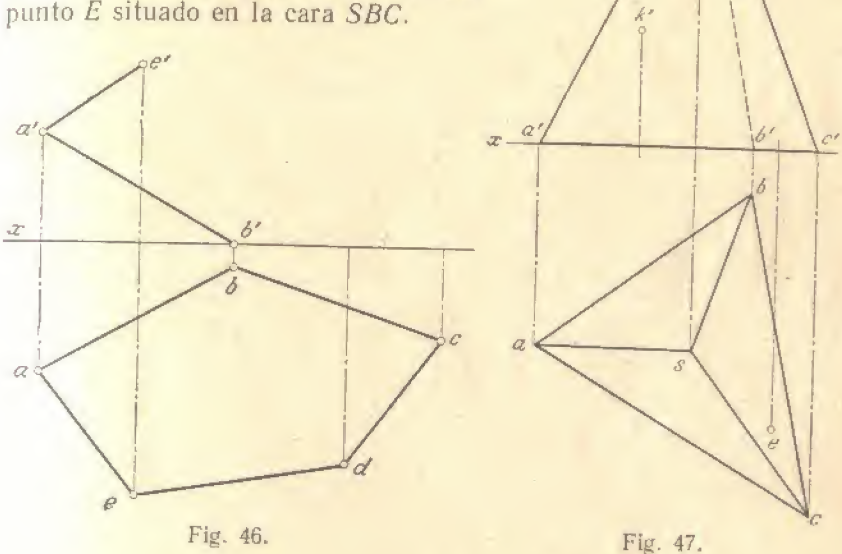


Fig. 46.

Fig. 47.

50*. Determinar la posición del plano dado por el triángulo *ABC*, respecto de los planos de proyección *V*, *H* y *W* (fig. 48, *a*).

Solución. El plano dado, como vemos, no es perpendicular ni al plano *V*, ni al plano *H*, puesto que sobre ninguno de estos planos se representa en forma de línea recta. Por consiguiente, el plano del triángulo *ABC* es o bien un plano de posición general, o bien un plano proyectante de perfil. Pero si el plano es proyectante de perfil (es decir, está situado perpendicularmente al plano *W*), entonces deberá pasar por la perpendicular al plano *W* (fig. 48, *b*). Veamos si se puede trazar en el triángulo *ABC* una perpendicular al plano *W*. Resulta que se puede (fig. 48, *c*): de ella sirve, por ejemplo, la horizontal *KB* (que es al mismo tiempo la frontal). Comenzamos la construcción con el trazado de la proyección frontal $b' k'$ de la horizontal, luego hallamos la proyección horizontal *bk*. Por ser $bk \| b' k'$ (claro está, que en los límites de la precisión gráfica del dibujo), la recta *BK* y, por lo tanto, el plano *ABC* son perpendiculares al plano *W*.

Aquí nos hemos valido sin la construcción de la proyección de perfil del triángulo *ABC*. Claro que se podía haber comenzado con la construcción de esta proyección: si ésta resultara el segmento de una recta, con esto se establecería que el plano *ABC* es un plano proyectante de perfil.

2*

51. Determinar la posición del plano dado por dos rectas paralelas, respecto de los planos de proyección V, H y W (fig. 49).

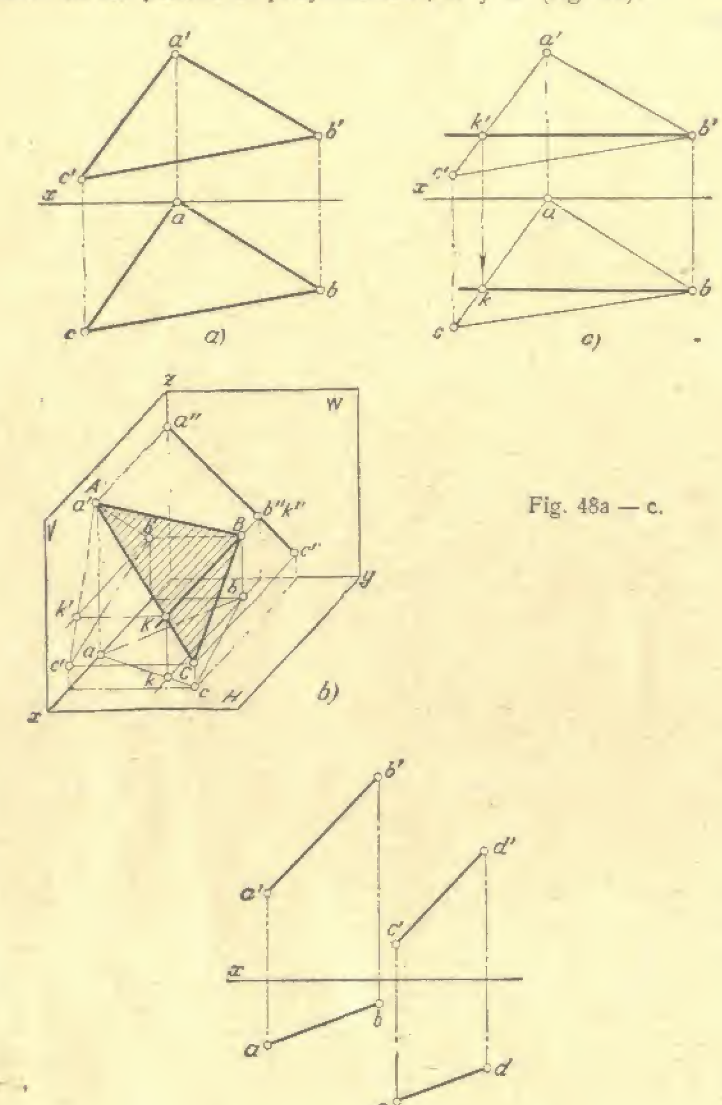


Fig. 48a — c.

Fig. 49.

§ 10. TRAZAS DE UN PLANO

52*. Construir las trazas de un plano dado por las rectas paralelas AB y CD (fig. 50, a).

Solución. Si una recta pertenece a un plano, las trazas de la recta están situadas en las trazas del mismo nombre del plano (fig. 50, b). Para construir las trazas del plano dado hay que construir las trazas de las rectas AB y CD. La traza frontal P_v pasará por las trazas frontales de las rectas, o sea, por los puntos N_1 y N_2, y la traza horizontal, por las trazas M_1 y M_2. Construimos las trazas de las rectas AB y

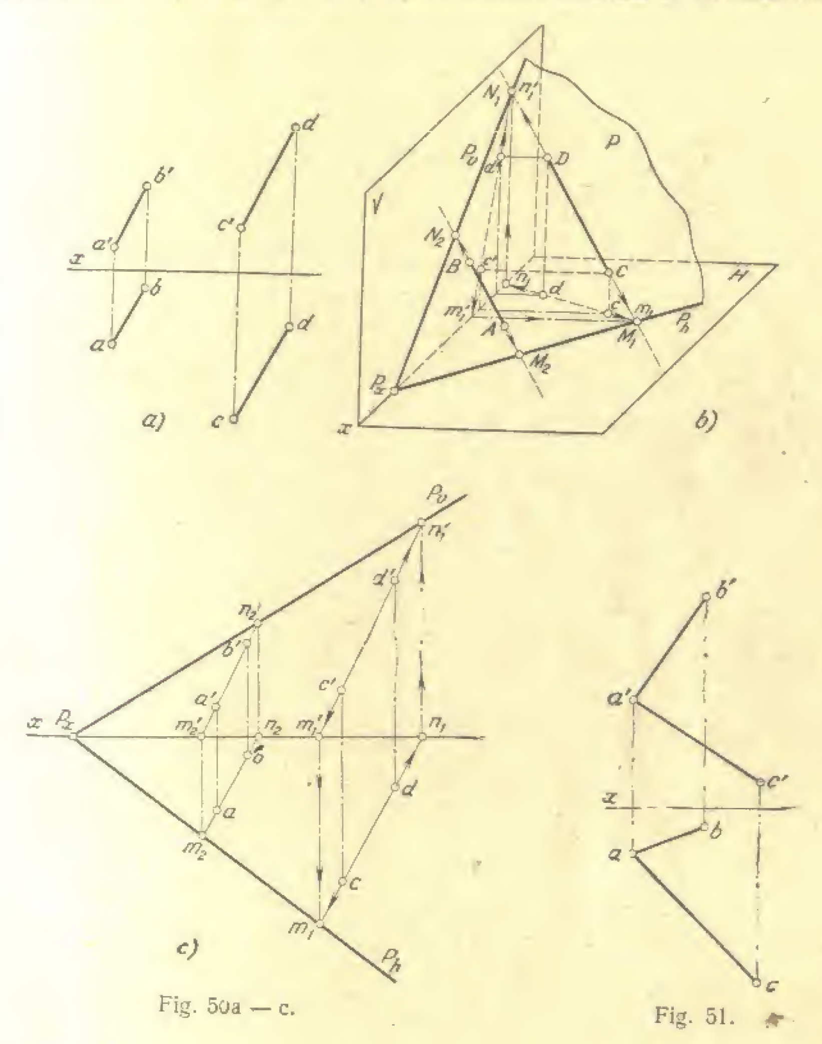


Fig. 50a — c.

Fig. 51.

CD, así como se examinó en el § 4 (por ejemplo, el problema 12*). Por los puntos m_1 y m_2 pasa la traza horizontal P_h, y por los puntos n_1' y n_2', la traza P_v (fig. 50, c). Si la construcción se ha efectuado con precisión, entonces ambas trazas se cortan en el punto P_x sobre el eje x.

53. Construir las trazas del plano dado por las rectas que se cortan AB y AC (fig. 51).

54 *. Construir las trazas del plano dado por las rectas que se cortan AB ($AB \parallel$ al plano H) y CD (fig. 52, *a*).

Solución. Puesto que las trazas del plano han de pasar por las trazas del mismo nombre de las rectas pertenecientes a este plano (fig. 52, *b*), entonces, hay que construir las trazas frontales de ambas rectas (los puntos N_2 y N_1) y trazar por éstas la traza frontal del plano (P_v). La dirección de la traza horizontal del plano es conocida: la traza P_h ha de ser paralela a la horizontal AB (fig. 52, *b*). Por esta razón, la traza P_h

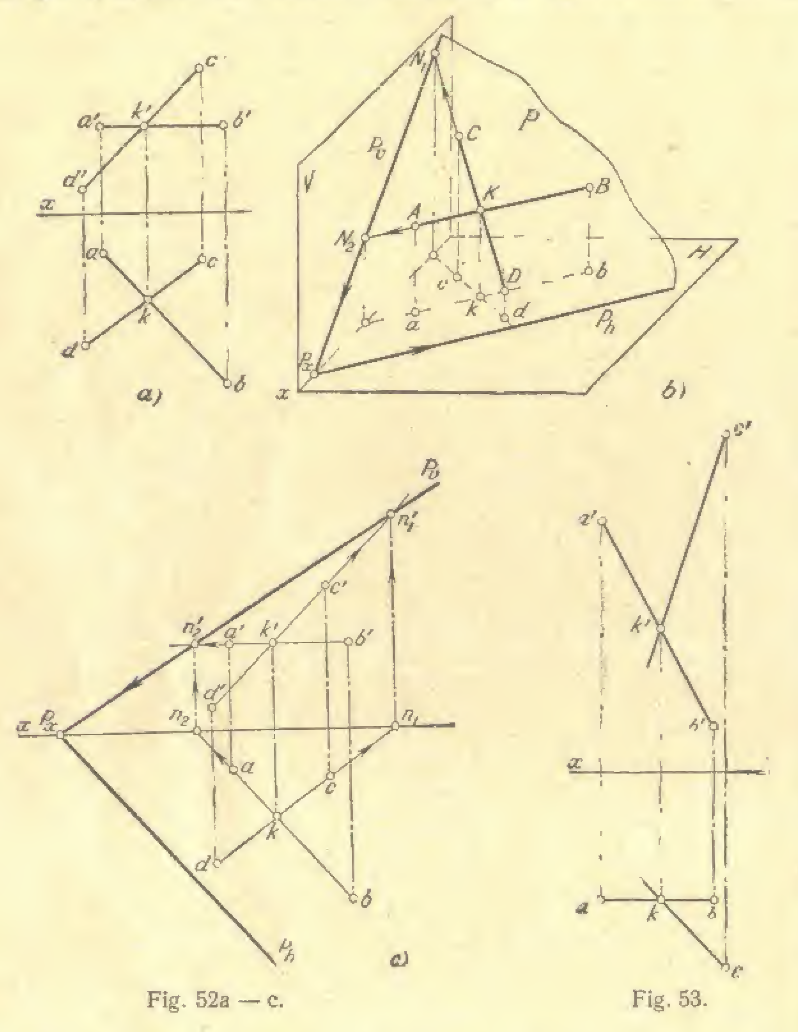


Fig. 52a — c.

Fig. 53.

pasará por el punto de intersección de las trazas (P_x) paralelamente a la horizontal AB. En la fig. 52, *c* se muestra que las proyecciones ab y cd han sido prolongadas hasta su intersección con el eje x en los puntos n_2 y n_1 y con ayuda de éstos se han construido los puntos n'_2 y n'_1 sobre las proyecciones $a'\,b'$ y $c'\,d'$. Por los puntos n'_2 y n'_1 se ha trazado la traza P_v hasta su intersección con el eje x en el punto P_x. Por el punto P_x se ha trazado la traza P_h paralelamente a la recta ab.

55. Construir las trazas del plano dado por las rectas que se cortan AB y KC (fig. 53).

56*. Construir la proyección que falta del segmento AB de una recta perteneciente al plano P (fig. 54, *a*).

Solución. Para construir la proyección horizontal del segmento AB hay que hallar las proyecciones horizontales de los puntos A y B (fig. 54, *b*). La proyección b se obtiene auxiliándose de la horizontal trazada en el plano dado. Primero trazamos la proyección $b'\,n'$ paralelamente al eje x, luego, por el punto n, la proyección hori-

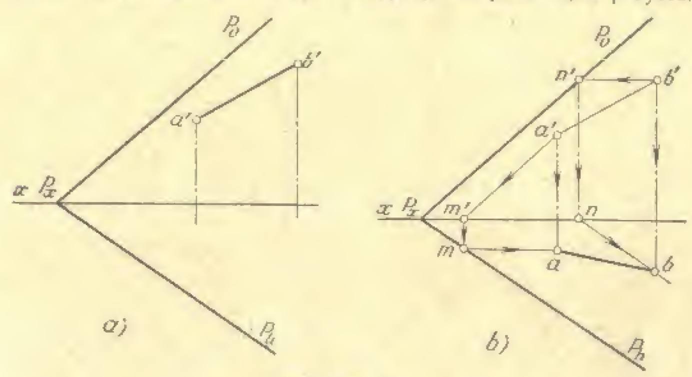


Fig. 54a, b.

zontal de la horizontal paralelamente a P_h y sobre ella hallamos la proyección b. La proyección horizontal del punto A se halla valiéndose de la frontal, aunque, claro está, también para este punto se podía tomar la horizontal. Por el punto a' trazamos la proyección frontal de la frontal (paralelamente a P_v), hallamos los puntos m' y m (las proyecciones de la traza horizontal de la frontal). La proyección horizontal de la frontal pasa por el punto m paralelamente al eje x; sobre esta proyección obtenemos el punto a. La proyección buscada del segmento AB queda determinada por los puntos a y b.

57*. Situar la recta AB (fig. 55, *a*) en un plano proyectante de perfil, dándose este plano por sus trazas sobre los planos H y V.

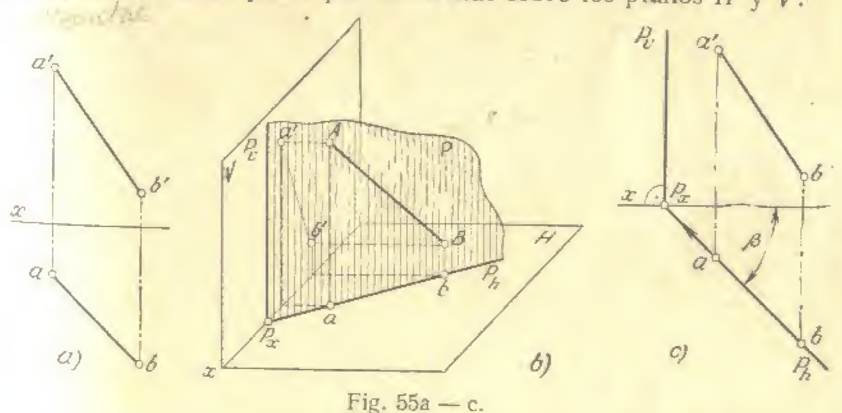


Fig. 55a — c.

Solución. Las proyecciones horizontales de todos los elementos situados sobre un plano proyectante horizontal se encuentran sobre la traza P_h. Por eso (fig. 55, *b*),

la traza P_h coincide con ab. Por el punto P_x, obtenido en la intersección de P_h con el eje x, trazamos, perpendicularmente al eje x, la traza frontal (P_v) del plano buscado.

El ángulo formado por la traza P_h con el eje x es igual al ángulo β entre el plano P y el plano de proyección V (fig. 55, c).

58. Situar la recta AB (fig. 56) en un plano proyectante frontal, expresando este plano por sus trazas sobre los planos V y H. Construir el dibujo y la representación clara. Señalar el ángulo de inclinación del plano P al plano de proyección H.

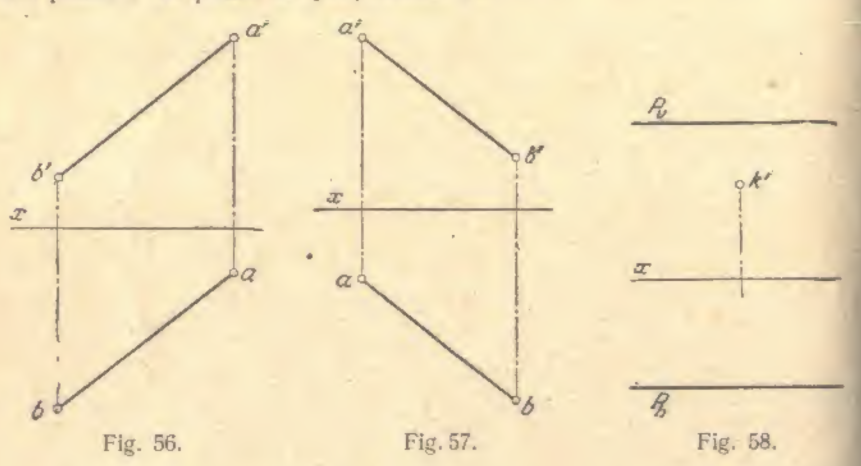


Fig. 56. Fig. 57. Fig. 58.

59. Situar la recta AB (fig. 57) en un plano proyectante de perfil, expresando este plano por sus trazas. Ejecutar el dibujo y dar la representación clara. Señalar los ángulos de inclinación del plano P a los planos V y H. Efectuar la construcción de las trazas del plano P con ayuda de la proyección de perfil de la recta y sin ella.

60. Construir la proyección que falta del punto K (fig. 58), situado en el plano P (sin valerse del plano de perfil de proyección).

III

CAPÍTULO

INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON UN PLANO Y DE DOS PLANOS ENTRE SÍ

§ 11. INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON UN PLANO PROYECTANTE

61*. Hallar el punto de intersección de la recta AB con el plano T (fig. 59, a) dado por su traza frontal T_v.

Solución. En este caso el plano T es paralelo al plano H y, por consiguiente, perpendicular al plano frontal de proyección; para el plano T, en el sistema V, H viene dada sólo la traza frontal T_v, paralela al eje de proyección x. Obviamente, la proyección frontal del punto buscado (k') de intersección ha de estar situada tanto en la traza T_v, como en la proyección frontal de la recta AB, es decir, en $a'\ b'$ (fig. 59, b).

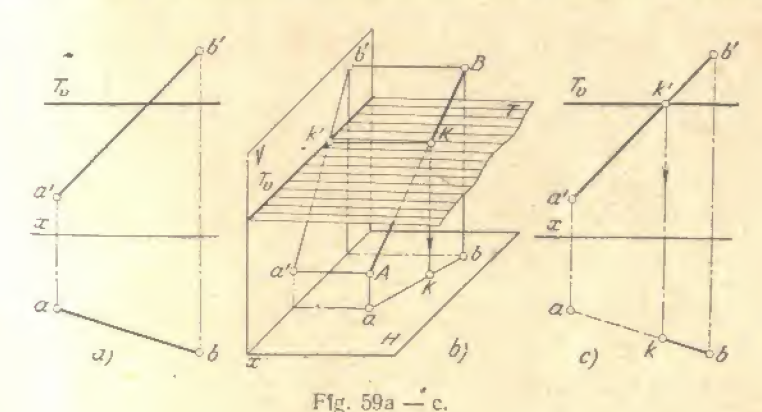


Fig. 59a — c.

Por esta razón, el punto k' (fig. 59, c) lo hallamos en el punto de intersección de la traza T_v con la proyección $a'\ b'$. Con ayuda del punto k' hallamos el punto k sobre ab.

Puesto que en la dirección de K a A la recta AB se encuentra bajo el plano T, en el dibujo la porción correspondiente de la proyección horizontal viene representada con una línea de trazos.

62. Hallar el punto de intersección de la recta AB con el plano S (fig. 60).

63*. Hallar el punto de intersección de la recta AB con el plano R (fig. 61, *a*).

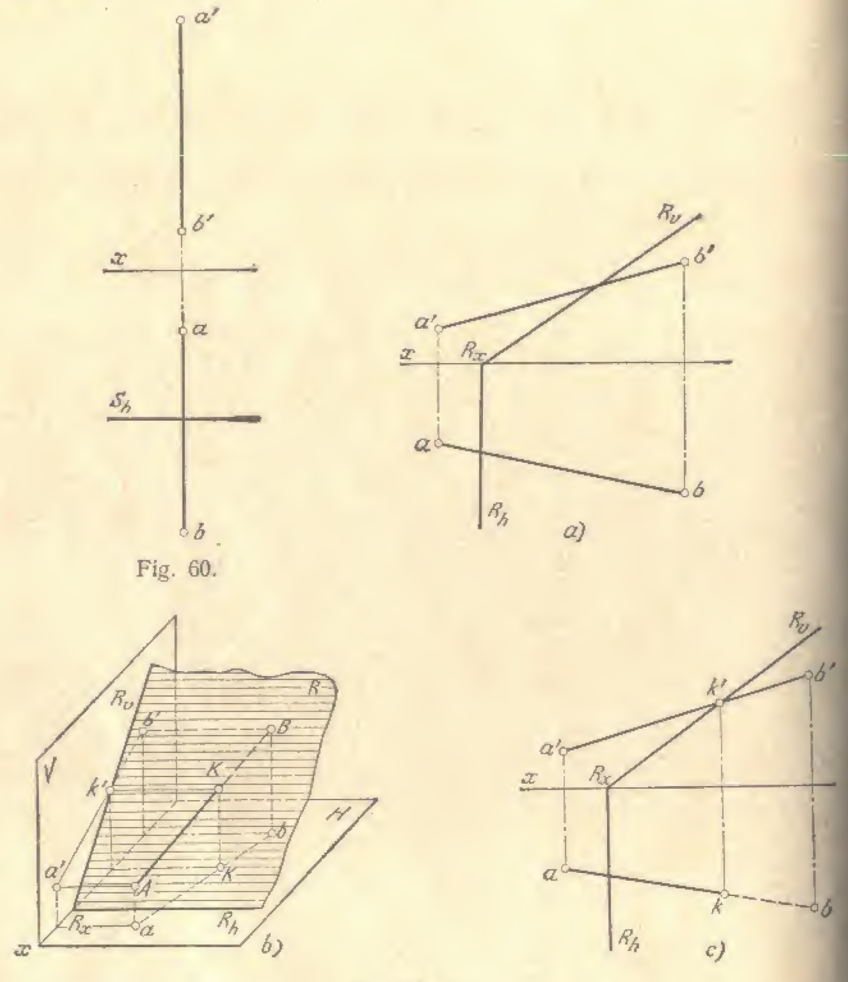


Fig. 60.

Fig. 61a — c.

Solución. El plano R es un plano proyectante frontal. Evidentemente, la proyección frontal (k') del punto buscado de intersección ha de encontrarse simultáneamente en la traza R_v y en la proyección frontal de la recta AB, o sea, sobre a' b' (fig. 61, *b*).

En el dibujo (fig. 61, *c*) hallamos k' en el punto de intersección de la traza R_v con a' b', y la proyección k, sobre ab. La recta AB, en la dirección de K a B, se encuentra bajo el plano R; por eso en el dibujo la porción correspondiente de la proyección horizontal viene representada con línea de trazos.

64*. Hallar el punto de intersección de la recta AB con el plano R (fig. 62, *a*).

Solución. El plano R es un plano proyectante horizontal. Evidentemente, la proyección horizontal del punto buscado de intersección debe encontrarse al mismo tiempo en la traza R_h y en la proyección ab (fig. 62, *b*). Por eso el punto k (fig. 62, *c*) lo obtenemos como el punto de intersección de la traza R_h con ab. Con auxilio del punto k hallamos la proyección k' sobre a' b'.

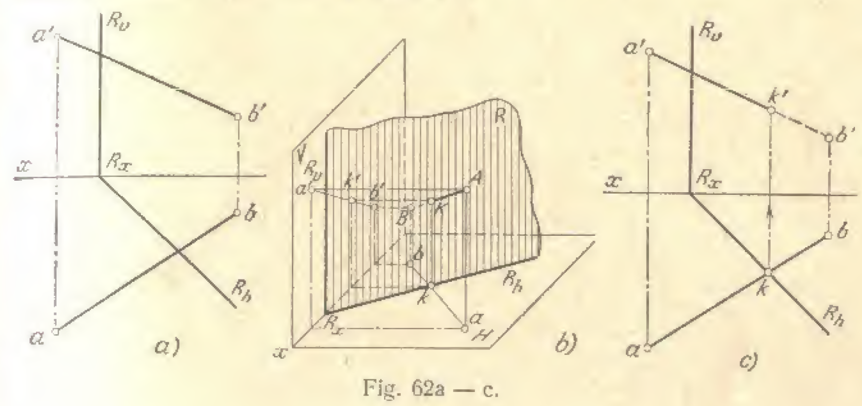


Fig. 62a — c.

En la dirección de K a B la recta AB se encuentra tras el plano R; en el dibujo la porción correspondiente de la proyección frontal viene representada con línea de trazos.

65*. Hallar el punto de intersección de la recta AB con el plano dado por el triángulo CDE (fig. 63, *a*).

Solución. Observamos que el plano del triángulo es perpendicular al plano H. La proyección k del punto de intersección ha de encontrarse al mismo tiempo en la recta cd y en la recta ab (fig. 63, *b* y *c*). Con ayuda del punto k hallamos k' sobre a' b'.

Puesto que la recta AB, en la dirección de K hacia A, se encuentra tras el triángulo CDE (fig. 63, *c*), en el dibujo la porción correspondiente de la proyección frontal de la recta viene representada con línea de trazos.

66. Hallar el punto de intersección de la recta AB con el plano dado por las rectas paralelas CD y EF (fig. 64).

§ 12. INTERSECCIÓN DE PLANOS ENTRE SÍ

67*. Hallar la línea de intersección del plano T, dado por su traza T_v, con el plano dado por dos rectas que se cortan AB y BC (fig. 65, *a*).

Solución. Como es sabido, la construcción de la línea de intersección de dos planos se reduce a la determinación de dos puntos, comunes para ambos planos dados, o de uno de estos puntos, si se conoce la dirección de la línea buscada.

En el caso dado la recta buscada puede ser determinada si se halla el punto de intersección de las rectas AB y BC con el plano T (fig. 65, *b*). Por consiguiente, la construcción de los puntos K_1 y K_2 se reduce a la construcción expuesta en la fig. 59, *b* y *c*.

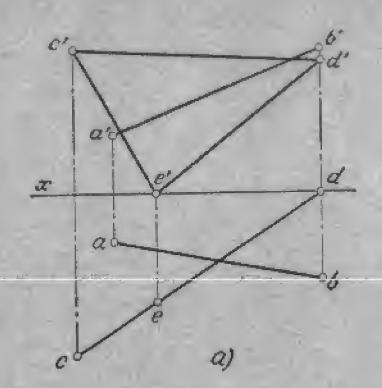
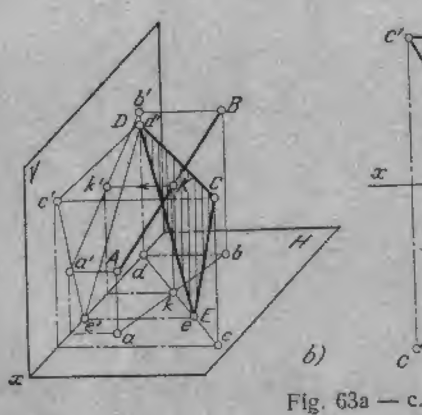
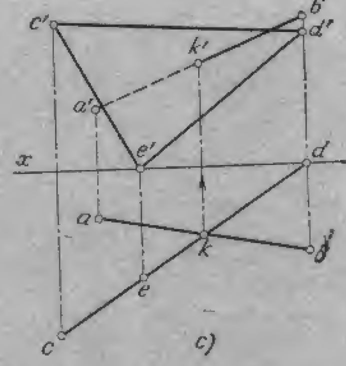




Fig. 63a — c.

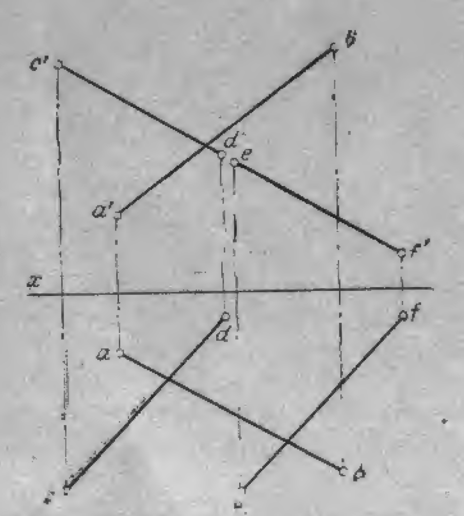


Fig. 64.

Si los planos se consideran intransparentes, entonces las proyecciones horizontales de las secciones de las rectas AB y BC, que se encuentran bajo el plano T, se deben representar con líneas de trazos. El plano T no influye en la visibilidad de las rectas AB y CD en el plano V, puesto que es perpendicular a este plano (fig. 65, *c*).

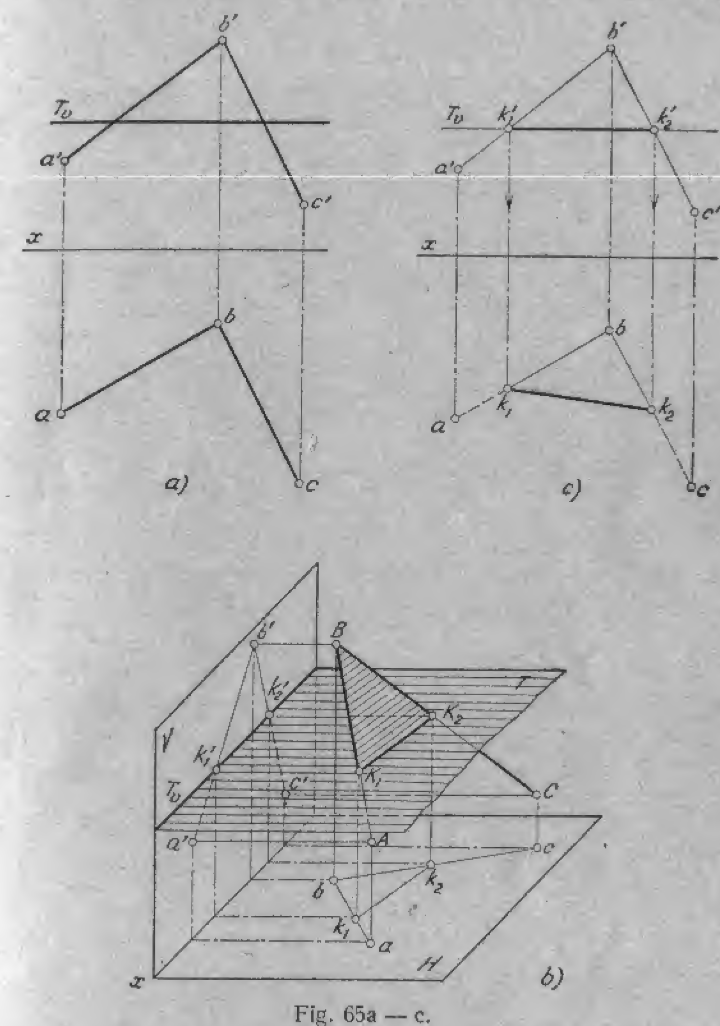


Fig. 65a — c.

68. Hallar la línea de intersección del plano S, dado por su traza S_h, con el plano dado por las rectas paralelas AB y CD (fig. 66).

69. Hallar la línea de intersección del plano proyectante frontal R, dado por su traza R_v, con plano dado por el triángulo ABC (fig. 67).

70*. Hallar la línea de intersección de los planos P y R (fig. 68, *a*).

Solución. Para la construcción de la línea de intersección de los planos se puede utilizar el punto N de intersección de las trazas P_v y R_v y el punto M de intersec-

ción de las trazas P_h y R_h (fig. 68, *b*). La recta *MN*, que pasa por estos puntos, es la línea de intersección buscada. Su proyección *mn* coincide con la traza R_h, puesto que el plano *R* es un plano proyectante horizontal. Estas construcciones se muestran en la fig. 68, *c*.

Fig. 66.

Fig. 67.

Fig. 68a — c.

71. Construir la línea de intersección de los planos *P* y *Q* (fig. 69).

72. Construir la línea de intersección de los planos *P* y *Q* (fig. 70), sin emplear el plano de perfil de proyección.

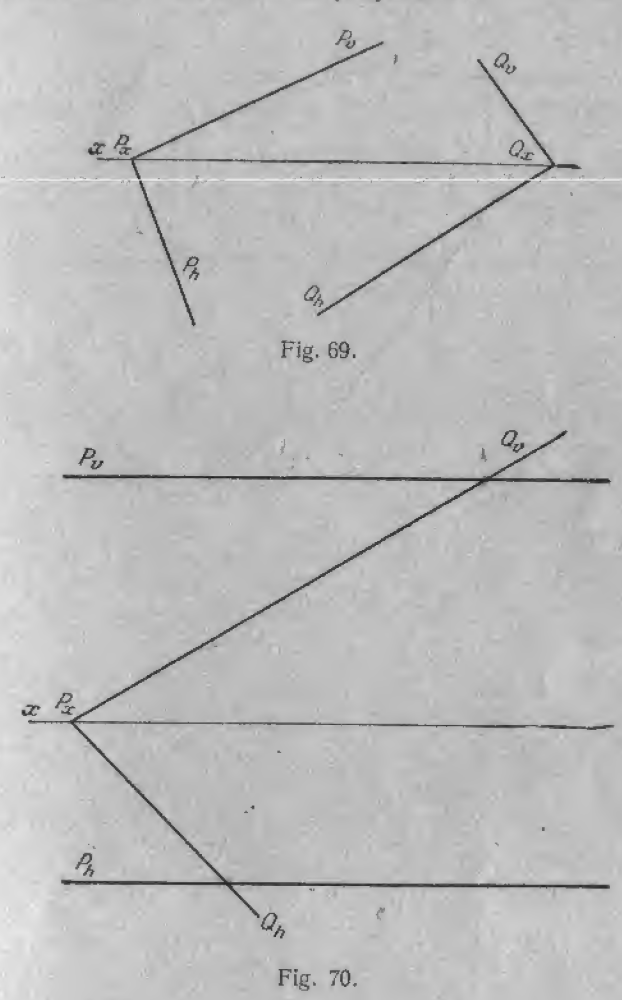
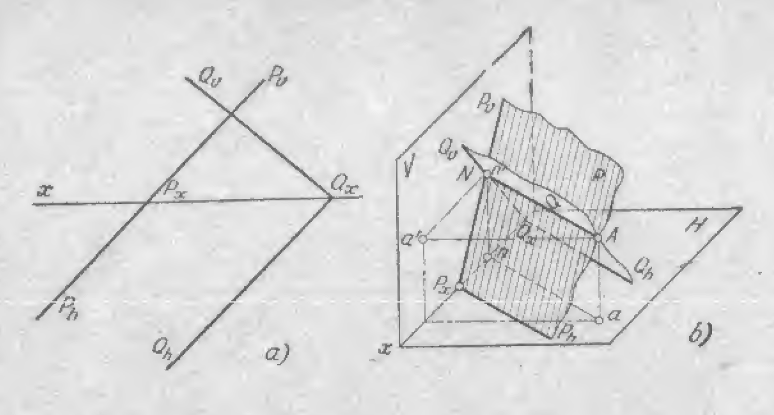


Fig. 69.

Fig. 70.

73*. Construir la línea de intersección de los planos *P* y *Q*, para los cuales $P_h \| Q_h$ (fig. 71, *a*).

Solución. En este caso las trazas horizontales de los planos son paralelas entre sí. Esto significa que la recta buscada es paralela al plano *H* y respecto de los planos *P* y *Q* es una horizontal (fig. 71, *b*). Para trazar esta horizontal basta construir uno de sus puntos. Hagamos uso del punto *N* de intersección de las trazas P_v y Q_v. Una vez construidas las proyecciones *n'* y *n* (fig. 71, *c*) trazamos *n' a'* paralelamente al eje *x*, y *na*, paralelamente a las trazas P_h y Q_h.



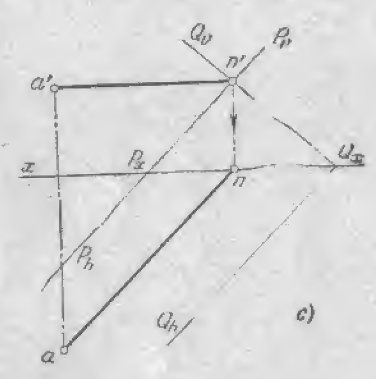


Fig. 71a—c.

74. Hallar la línea de intersección de los planos P y Q (fig. 72).

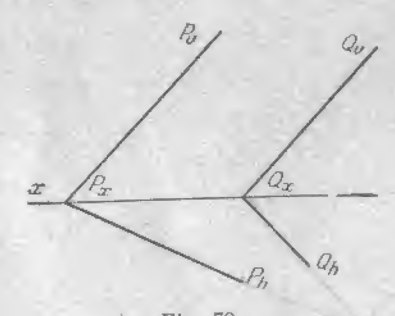


Fig. 72.

75*. Hallar la línea de intersección de los planos P y Q (fig. 73, *a*), valiéndose del plano de perfil de proyección y sin hacer uso de él.

Solución. Puesto que los planos dados son planos proyectantes de perfil, la línea de su intersección MN (fig. 73, *b*) es paralela al eje x. Para hallar esta recta hay que construir uno de sus puntos. Introducimos (fig. 73, *b* y *c*) el plano auxiliar S y construimos las líneas de intersección de este plano con el plano P (*1—2*) y con el plano

Q(*3—4*). Estas líneas, en su intersección, dan el punto $M(m', m)$, común para los planos P y Q. Trazamos por m' y m las proyecciones de la recta buscada $m'n'$ y mn

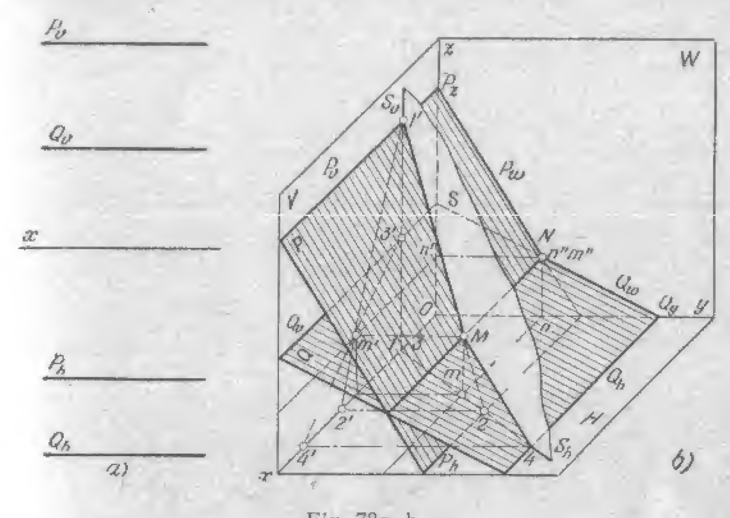


Fig. 73a, b.

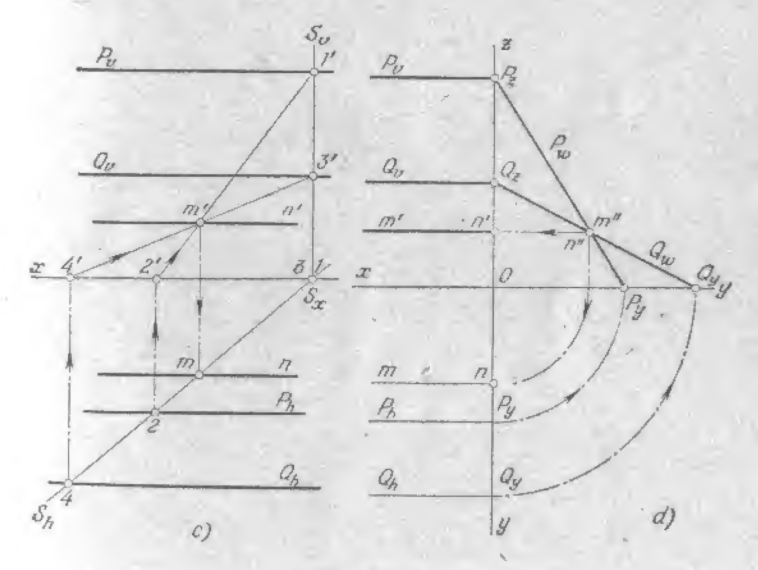


Fig. 73c, d.

paralelamente al eje x. En calidad de plano auxiliar se puede utilizar también el plano de perfil de proyección (fig. 73, *b* y *d*): la línea MN pasa por el punto de intersección de las trazas P_w y Q_w.

76. Construir la línea de intersección de los planos del triángulo *ABC* y el cuadrilátero *DEFG* (fig. 74), valiéndose del plano de perfil de proyección y sin hacer uso de él. Determinar la visibilidad de los planos.

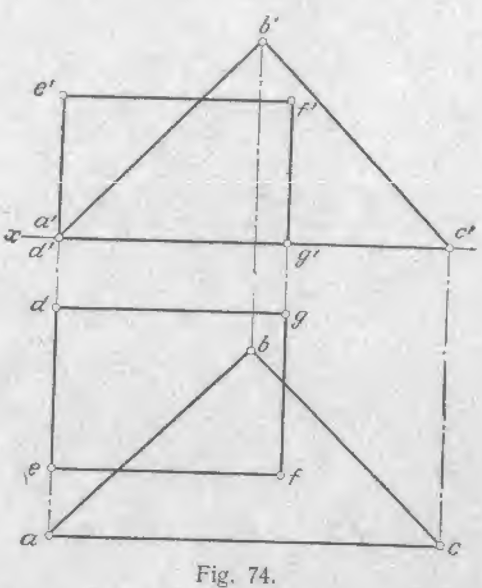


Fig. 74.

§ 13. INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON UN PLANO DE POSICIÓN GENERAL

77*. Hallar el punto de intersección de la recta *AB* con el plano dado por el triángulo *CDE* (fig. 75, *a*).

Solución. Como es sabido, para hallar el punto de intersección de una recta con un plano de posición general hay que trazar por la recta un plano auxiliar (*R*), construir la línea de intersección de este plano con el dado (*1—2*) y hallar el punto de intersección (*K*) de las rectas dada y construida. El punto *K* es el punto buscado de intersección de la recta con el plano (fig. 75, *b*). En calidad de plano auxiliar corrientemente se emplea un plano proyectante frontal u horizontal.

En la fig. 75, *c* por la recta dada *AB* se ha trazado el plano proyectante frontal *R*, cuya traza R_v coincide con *a' b'*. La traza horizontal del plano, en este caso, es innecesaria y por eso no se muestra.

Construimos la línea de intersección del plano *R* con el plano dado por el triángulo *CDE* (véase un ejemplo de tal construcción en el problema 67). Una vez construida la línea *1—2* (fig. 75, *c*), hallamos el punto de su intersección con la recta *AB* (el punto *K* con las proyecciones *k* y *k'*).

Para determinar las secciones de la recta *AB*, tapadas por el triángulo, se debe utilizar el análisis de las posiciones de los puntos en las rectas que se cruzan. Por ejemplo, los puntos *1* y *3* se encuentran sobre la rectas que se cruzan *ED* y *AB* respectivamente. Las proyecciones frontales de estos puntos se confunden, es decir, los puntos *1* y *3* equidistan del plano *H*. Pero las distancias de estos puntos hasta el plano *V* son distintas; el punto *3* se encuentra más alejado del plano *V* que el punto *1*. Por esta razón, respecto al plano *V* el punto *3* tapa al punto *1* (la dirección de la vista se indica con la flecha *s*). Por consiguiente, la recta *AB* pasa por delante del

triángulo *CDE* hasta el punto *K*. Comenzando desde el punto *K* hacia la izquierda el triángulo tapa a la recta *AB*, por lo cual esta sección de la recta se muestra con línea de trazos.

Para revelar la sección oculta en la proyección horizontal de la recta *AB* examinemos los puntos *4* y *5* situados sobre las rectas *AB* y *CD* respectivamente.

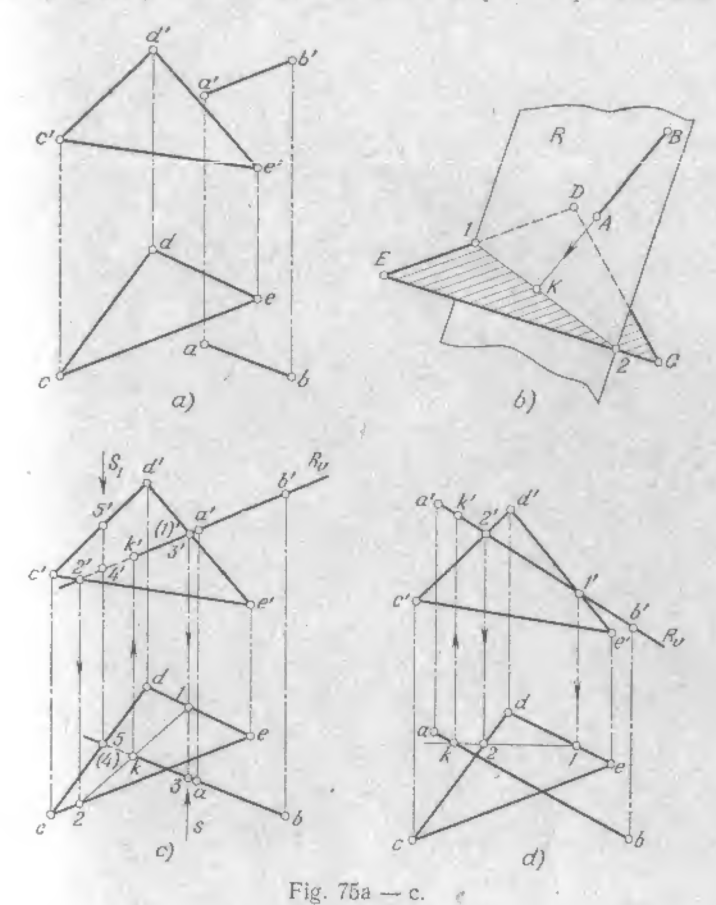


Fig. 75a — c.

Si se mira a estos puntos en la dirección s_1, veremos primeramente el punto *5*. El punto *4* está tapado por el punto *5*. Por lo tanto, la recta *AB* en este lugar está tapada por el triángulo *CDE*, y la porción de su proyección desde el punto *k* hasta el punto *4* debe ser representada con línea de trazos. En el caso dado, el punto *K* está dentro del contorno del triángulo *CDE*.

En el caso de otra posición mutua de los elementos que se cortan es posible el caso cuando el punto *K* sea exterior al triángulo (fig. 75, *d*). Esto significa que la recta *AB* corta al plano dado por el triángulo *CDE* fuera del contorno de este triángulo. Tras el punto *K* (hacia la izquierda) la recta *AB* está oculta.

78. Hallar los puntos de intersección de la recta *AB* con las caras de una pirámide (fig. 76). Las caras de la pirámide deben ser consideradas como planos dados por triángulos.

79. Hallar los puntos de intersección de la recta AB con las caras de un prisma (fig. 77). Las caras del prisma deben ser consideradas como planos dados por rectas paralelas.

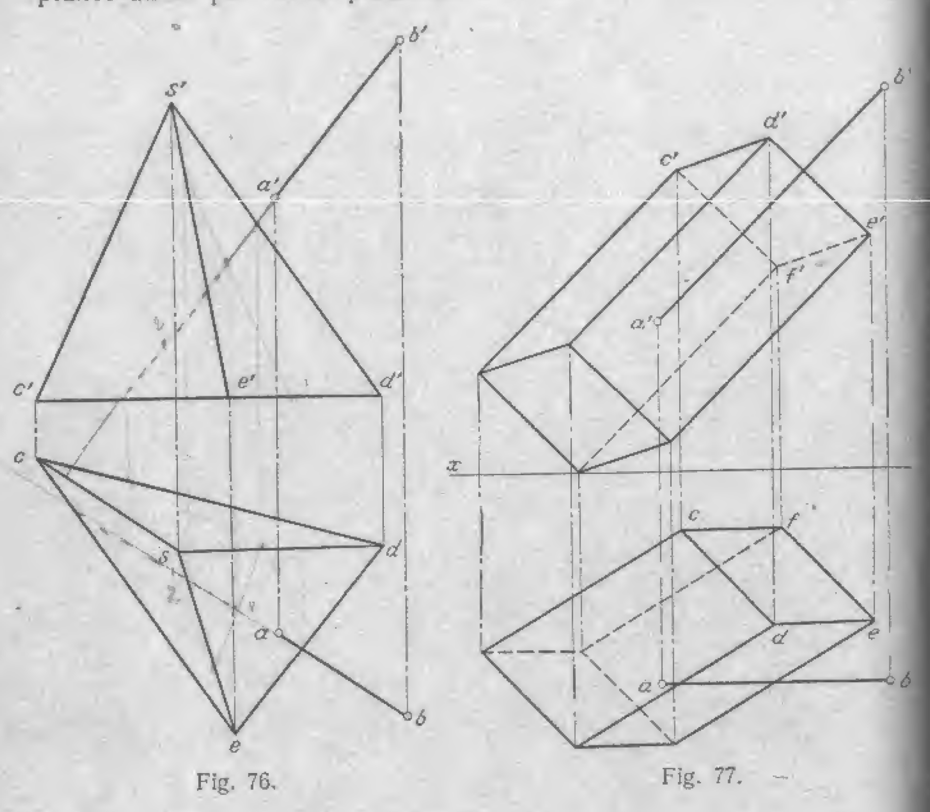


Fig. 76. Fig. 77.

80*. Hallar los puntos de intersección de la recta AB con el plano P (fig. 78, a).

Solución. Trazamos por la recta AB (fig. 78, b y c) el plano proyectante frontal R (su traza R_v coincide con $a'b'$) y construimos la línea MN de intersección de ambos planos: el dado y el trazado por la recta AB (la construcción es análoga a la efectuada en el problema 70). El punto buscado $K(k, k')$ de intersección de la recta AB con el plano P se encuentra en el punto de intersección de MN con AB.

En este problema, la visibilidad de la porción de la recta desde el punto A hasta K es evidente; sin embargo, en casos más complicados, la parte vista de la recta debe determinarse a base del análisis de las posiciones de los puntos. Por ejemplo, tomando el punto 1 (sobre la recta AB) y el punto N (sobre la traza P_v), vemos que el punto 1 se encuentra más alejado del plano V que el punto N. Por consiguiente, la recta AB hasta el punto K es vista. Tras el punto K la recta se muestra con línea de trazos (está oculta). Análogamente se determina la visibilidad en la proyección horizontal.

81. Hallar el punto de intersección de la recta AB con el plano P (fig. 79).

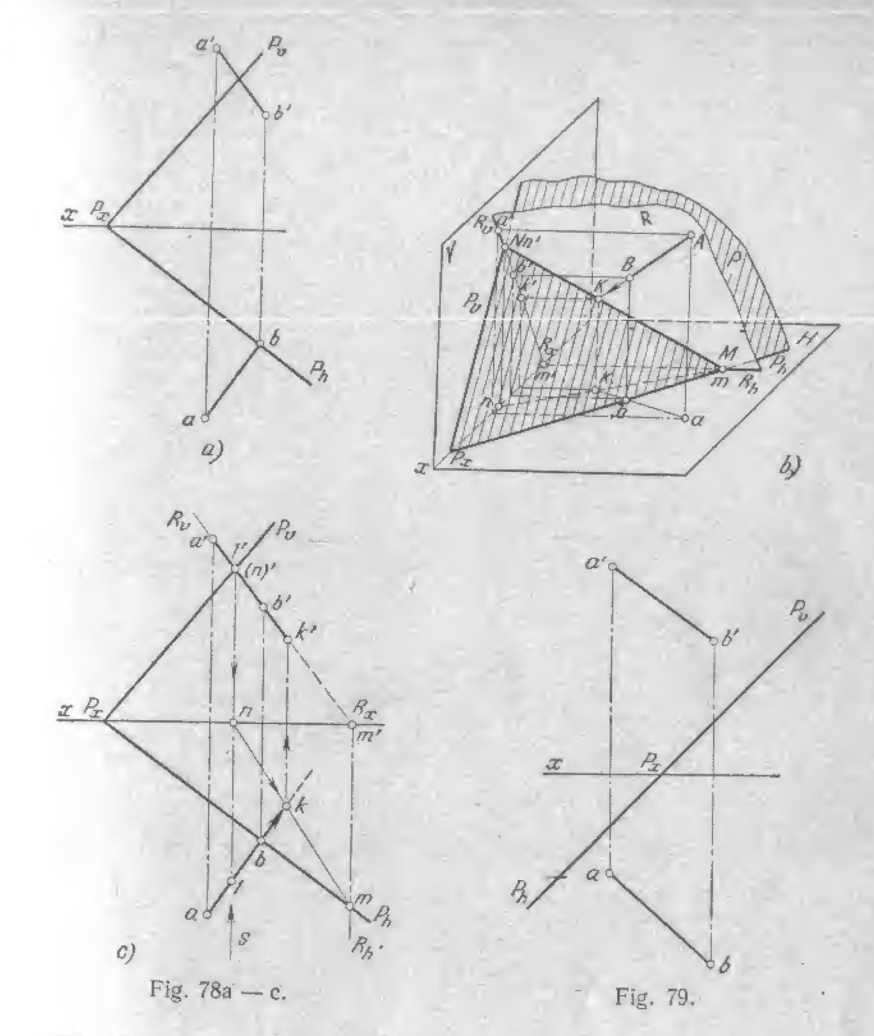


Fig. 78a — c. Fig. 79.

82*. Hallar el punto de intersección de la recta AB con el plano P (fig. 80, a).

Solución. Trazamos por la recta AB un plano proyectante horizontal R (su traza R_h coincide con ab) y construimos la línea de intersección de los planos P y R, haciendo uso de los puntos M y N de intersección de las trazas homónimas de estos planos (fig. 80, b y c). El punto buscado (k', k) se encuentra en el punto de intersección de MN con AB. En la fig. 80, d el punto K se ha construido con auxilio del plano W. Por ser el plano P un plano proyectante de perfil (fig. 80, b), la proyección de perfil k'' se encuentra en el punto de intersección de la traza P_w con $a''b''$. Conociendo k'', construimos κ' sobre $a'b'$ y k sobre ab. Las partes vistas de la recta AB se determinan de la misma manera que en los problemas 77 y 80.

83. Hallar el punto de intersección de la recta AB con el plano P (fig. 81).

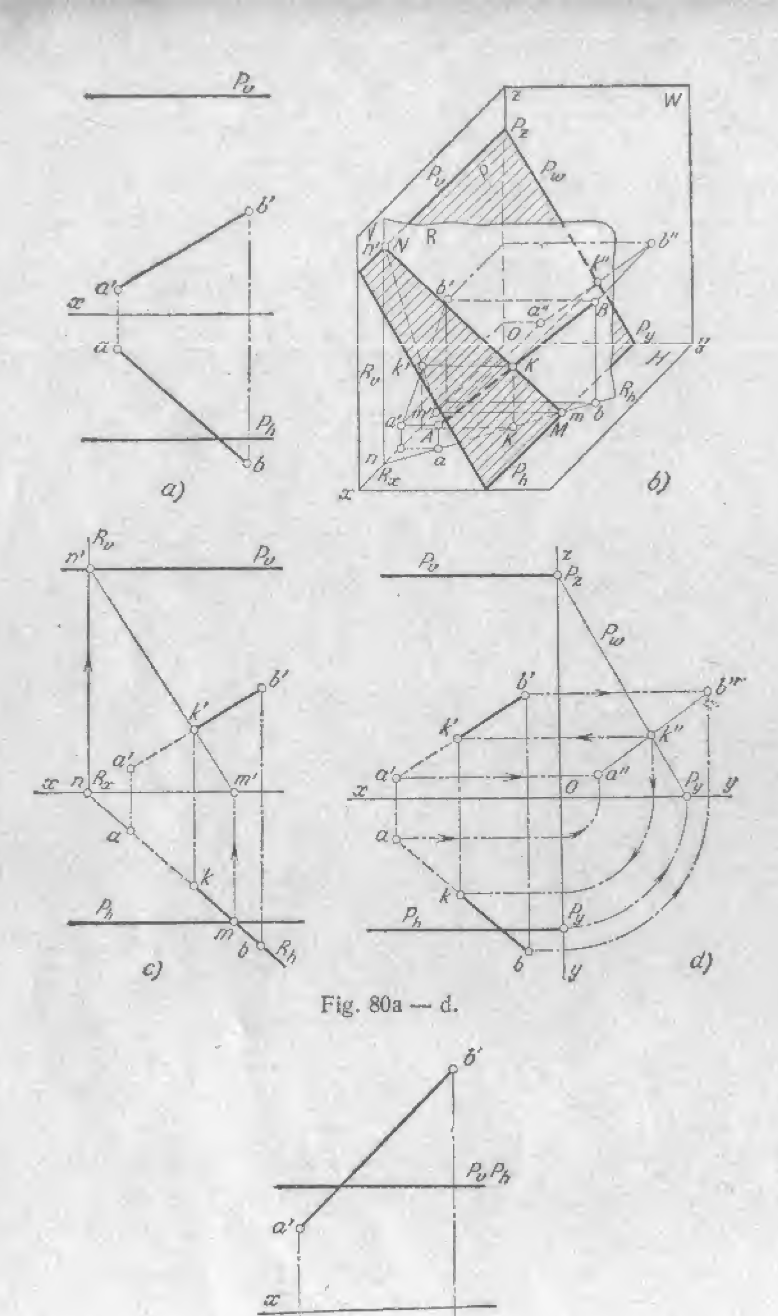


Fig. 80a — d.

Fig. 81.

84*. Hallar el punto de intersección de la recta AB con el plano dado por el triángulo CDE (fig. 82, *a*).

Solución. Trazamos por la recta AB (fig. 82, *b* y *c*) el plano R paralelo al plano W. Este plano corta al plano dado según la recta MN (los puntos m', n', m y n se encuentran en la intersección de las trazas R_v y R_h con las proyecciones del mismo

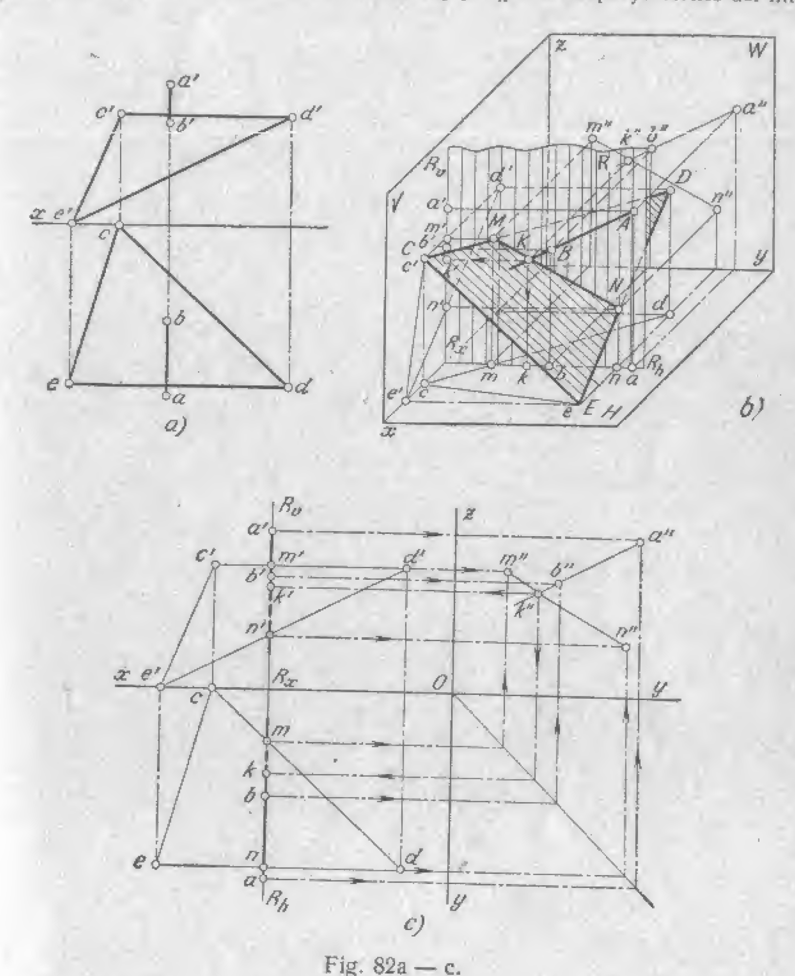


Fig. 82a — c.

nombre de los lados correspondientes del triángulo CDE). Dado que las rectas AB y MN son de perfil, para hallar el punto (K) de su intersección construimos las proyecciones de perfil $a''b''$ y $m''n''$. La proyección k'' se halla en la intersección de $a''b''$ y $m''n''$. Con ayuda de k'' construimos k' sobre $a'b'$ y k sobre ab.

85. Hallar el punto de intersección de la recta EF con el plano dado por el cuadrilátero $ABCD$ (fig. 83).

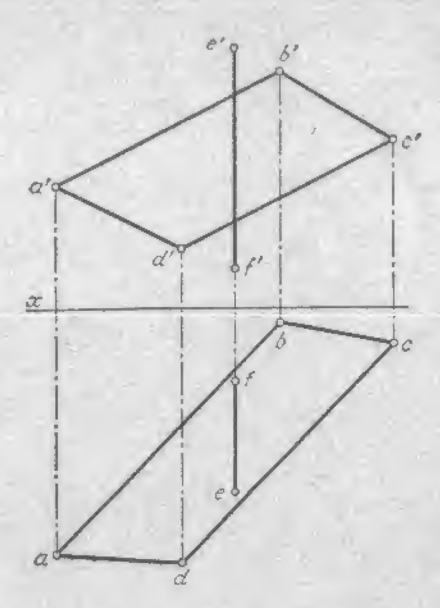


Fig. 83.

§14. CASOS GENERALES DE INTERSECCIÓN DE PLANOS

86*. Hallar la línea de intersección de los planos dados por el triángulo ABC y las rectas paralelas ED y FG (fig. 84, *a*).

Solución. En este caso, los puntos comunes para ambos planos pueden ser hallados como los puntos de intersección (M y N) de los lados del triángulo AB y AC con el plano dado por las rectas ED y FG (fig. 84, *b*).

Trazamos por la recta AB el plano proyectante frontal S, expresándolo por su traza S_v(fig. 84, *c*). Este plano corta al plano de las rectas paralelas según la recta 1—2 ($1'2'$, 1—2), que se corta con el lado AB en el punto M (m, m'). El plano proyectante frontal T, trazado por la recta AC, viene dado por su traza T ; este plano corta al plano de las rectas paralelas según la línea 3—4 ($3'4'$, 3—4), que en su intersección con el lado AC da el punto N (n, n'). La línea buscada de intersección de los planos pasa por los puntos M y N.

Para determinar la visibilidad de los planos, al cortarse éstos mutuamente, en general, se debe emplear el procedimiento indicado, por ejemplo, en la solución del problema 77. Examinemos los puntos 2 (que se encuentra sobre la recta FG) y 5 (que se encuentra sobre la recta AB). El análisis de la posición de estos puntos demuestra que en el plano V el punto 5 tapa al punto 2, lo que significa que la recta AB en este lugar pasa ante la recta FG, es decir, el triángulo ABC es visto hasta la recta KM. Lo demás está claro del dibujo.

87. Hallar la línea de intersección de los planos dados por el triángulo ABC y el cuadrilátero $DEFG$ (fig. 85).

88. Hallar la línea de intersección de los planos dados por el triángulo ABC y el cuadrilátero $DEFG$ (fig. 86).

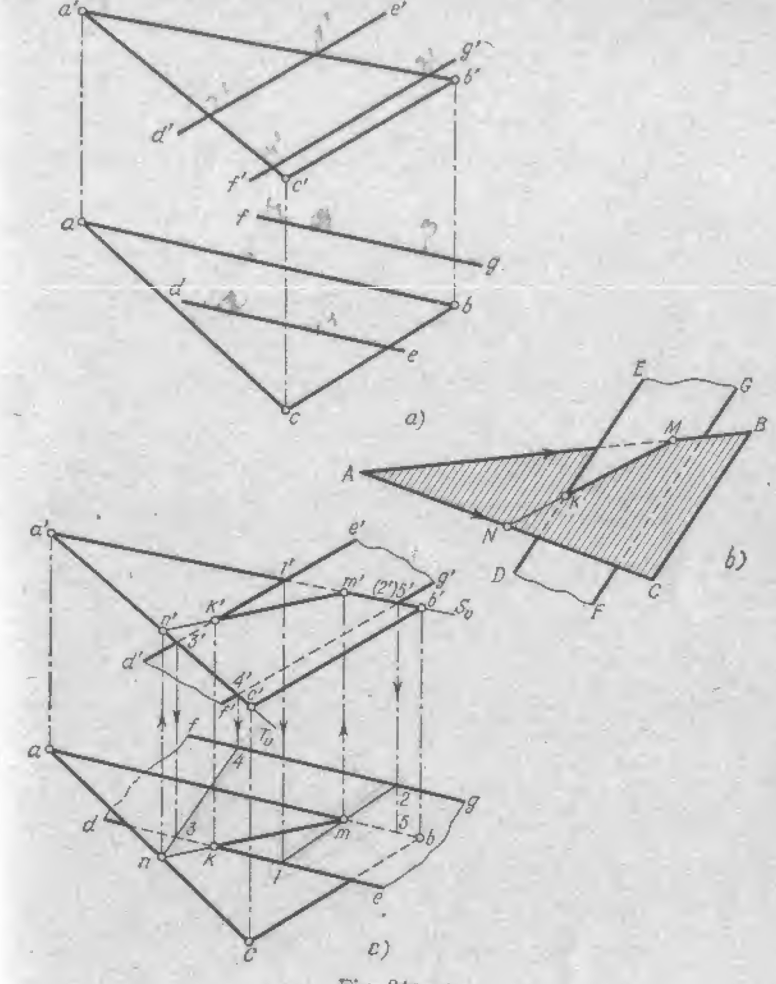


Fig. 84a—c.

89*. Hallar la línea de intersección de dos planos, uno de los cuales está dado por las rectas paralelas AB y CD , y el otro, por las rectas que se cortan FE y EG (fig. 87, *a*).

Solución. Para hallar los puntos comunes para los planos dados se han introducido dos planos auxiliares S y T (fig. 87, *b*) y se han construido las líneas de intersección de estos planos con los dados. Por los puntos M y N de intersección de estas líneas pasa la recta buscada. En la fig. 87, *c* los planos S y T son paralelos al plano H. Ellos cortan a los planos dados según las horizontales 1—2, 3—4 y 5—6, 7—8 (véase el problema 67).

Las rectas 1—2 y 3—4, al intersecarse, dan el punto M (m, m'), y las rectas 5—6 y 7—8, el punto N (n, n'). La recta MN(mn, $m'n'$) es la línea buscada de intersección de los planos.

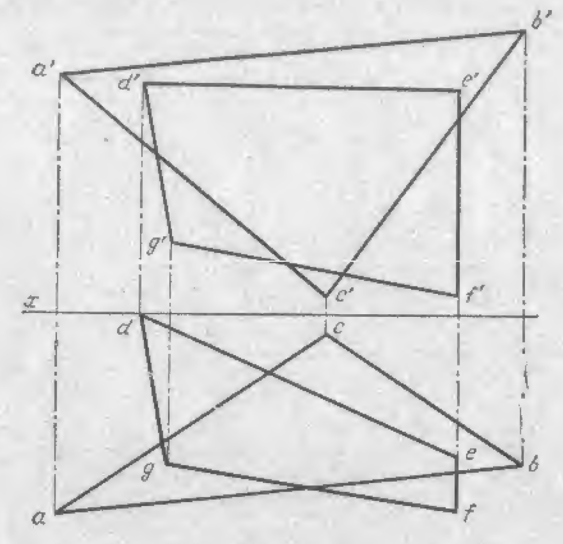


Fig. 85.

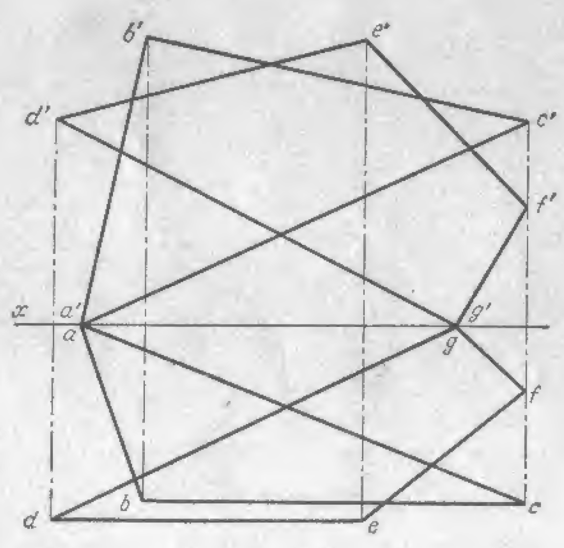


Fig. 86.

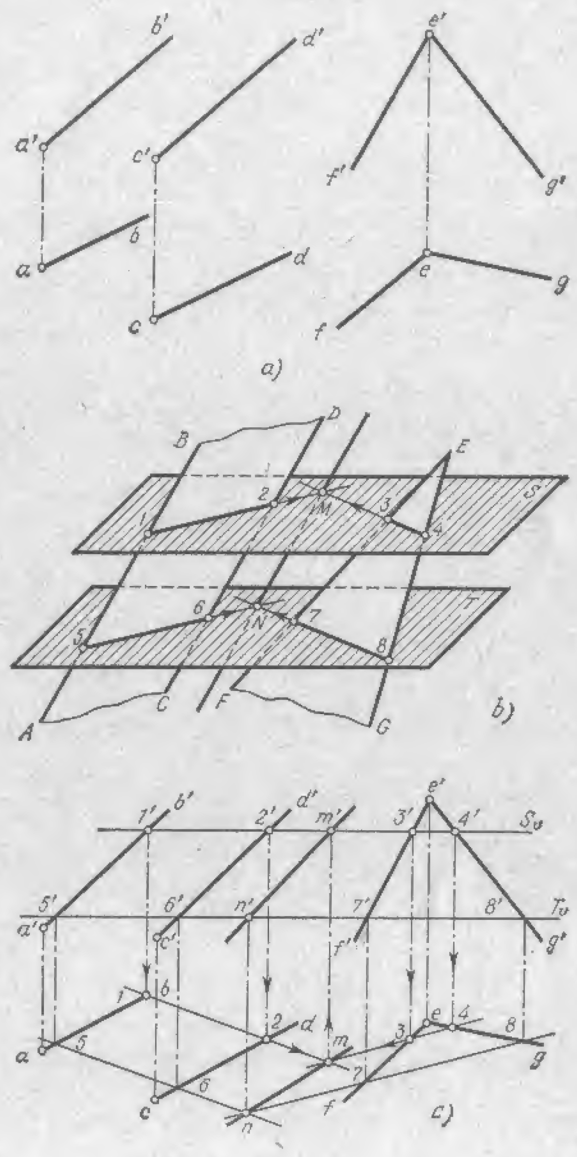


Fig. 87a — c.

90. Hallar la línea de intersección de dos planos, uno de los cuales está dado por el triángulo *ABC*, y el otro, por las rectas paralelas *ED* y *FG* (fig. 88).

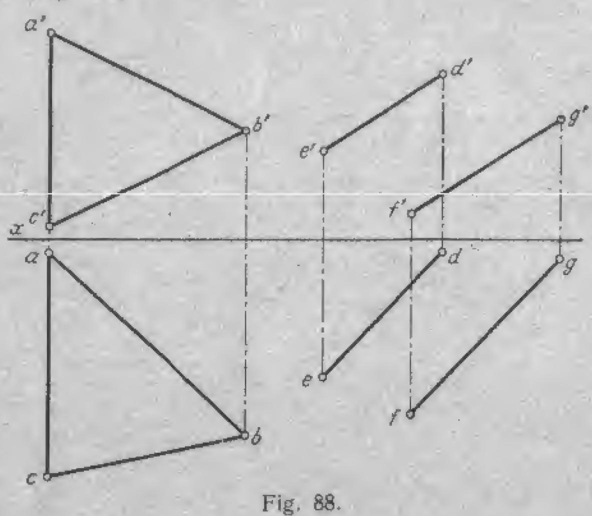


Fig. 88.

91. Hallar la línea de intersección de dos planos, uno de los cuales viene dado por el triángulo *DEF*, y el otro, por la recta *BC* y el punto *A* (fig. 89).

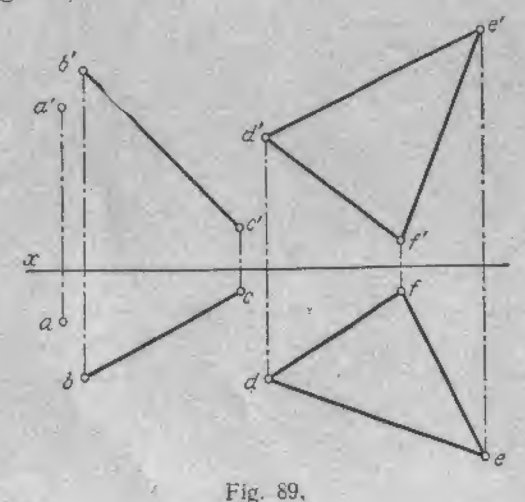


Fig. 89.

IV

CAPÍTULO

PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD DE RECTA Y PLANO Y DE DOS PLANOS

§ 15. PARALELISMO DE RECTA Y PLANO Y DE DOS PLANOS

92*. Trazar por el punto *A* una recta cualquiera paralela al plano del triángulo *BCD* (fig. 90, *a*).

Solución. Una recta es paralela a un plano, si ella es paralela a una recta situada en este plano. Por esta razón, por el punto *A* se puede trazar una infinidad de rectas paralelas al plano dado. Por ejemplo, al trazar (fig. 90, *b*) por el punto *a'* la recta

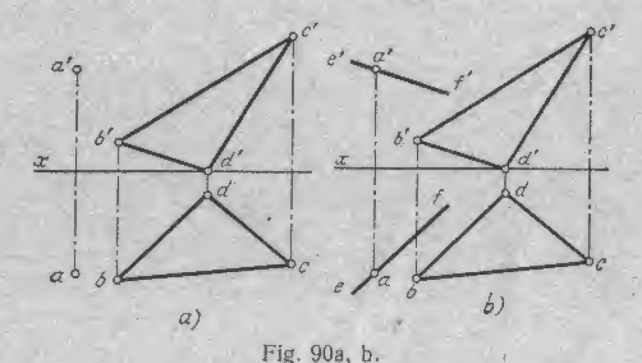


Fig. 90a, b.

e'f', paralelamente a *b'd'* y por *a* la recta *ef* paralelamente a *bd*, obtenemos las proyecciones de la recta *EF* paralela al lado *BD* del triángulo y, por consiguiente, también a su plano. La elección de la recta *BD* fue arbitraria.

93*. Trazar por el punto *A* una recta cualquiera paralela al plano *P* (fig. 91, *a*).

Solución. Construimos (fig. 91, *b*) las proyecciones *mn* y *m'n'* de cierta recta *MN* situada sobre el plano *P*. Luego, por el punto *a'* trazamos la proyección frontal *b'c'* paralelamente a *m'n'*, y por *a* la proyección horizontal *bc* paralelamente a *mn*. La recta *BC* es paralela a la recta *MN* y, por lo tanto, también al plano *P*.

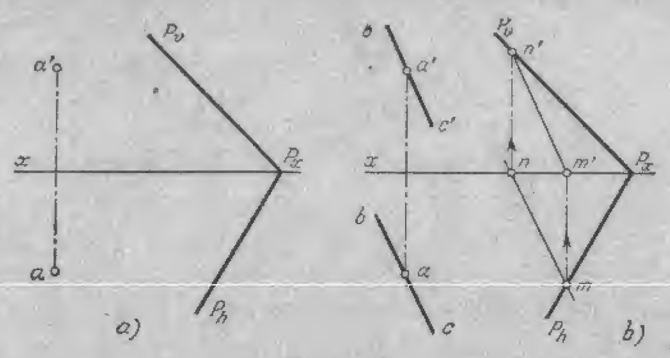


Fig. 91a, b.

94*. Determinar si la recta AB es paralela al plano P (fig. 92, *a*).

Solución. Para determinar si la recta AB es paralela al plano P, hay que pretender trazar en este plano una recta paralela a la dada. En la fig. 92, *b* se ha trazado la proyección frontal $c'd'$ paralelamente a $a'b'$. Construimos la proyección horizontal cd, observando la condición de que la recta CD debe estar situada sobre el

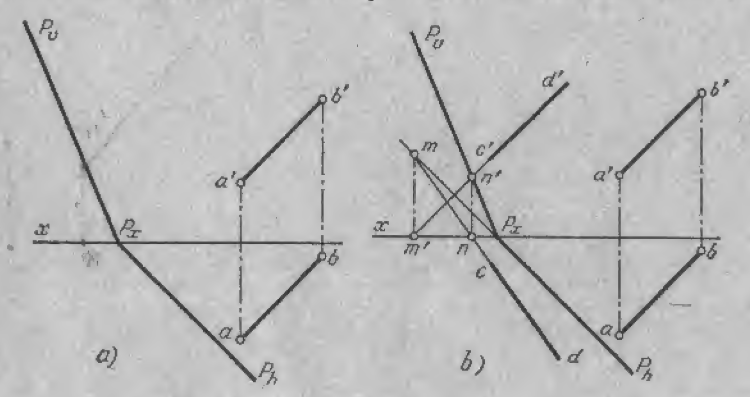


Fig. 92a, b.

plano P. Puesto que la proyección construida cd no es paralela a ab, entonces las rectas AB y CD no son paralelas entre sí, lo que significa que la recta AB no es paralela al plano P.

Se podía haber comenzado con el trazado de la proyección horizontal de cierta recta paralelamente a ab, construir su proyección frontal, observando la condición de que esta recta debe estar situada sobre el plano P, y confrontar la proyección frontal construida con $a'b'$.

95. Determinar si la recta AB es paralela:

a) al plano dado por las rectas paralelas CD y EF (fig. 93, *a*),
b) al plano P (fig. 93, *b*),
c) al plano Q (fig. 93, *c*).

96*. Trazar por el punto A un plano paralelo al plano dado por los puntos B, C y D (fig. 94, *a*).

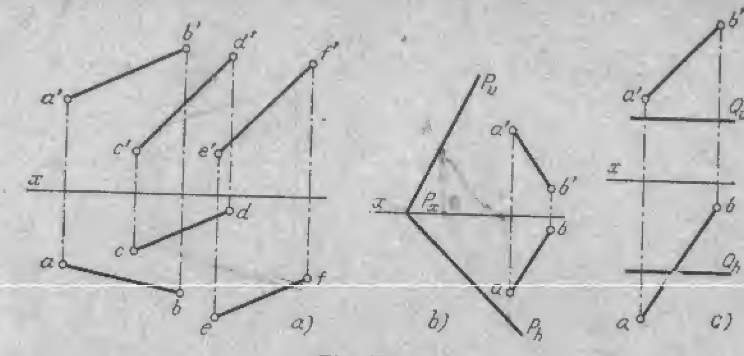


Fig. 93a — c.

Solución. Dos planos son paralelos, si dos rectas que se cortan de uno de ellos son respectivamente paralelas a dos rectas que se cortan del otro plano (fig. 94, *b*).

Para construir el plano buscado trazamos en el plano dado dos rectas que se cortan BD y CD (fig. 94, *b* y *c*). Luego, por el punto a' trazamos $a'f'$ paralelamente a $b'd'$

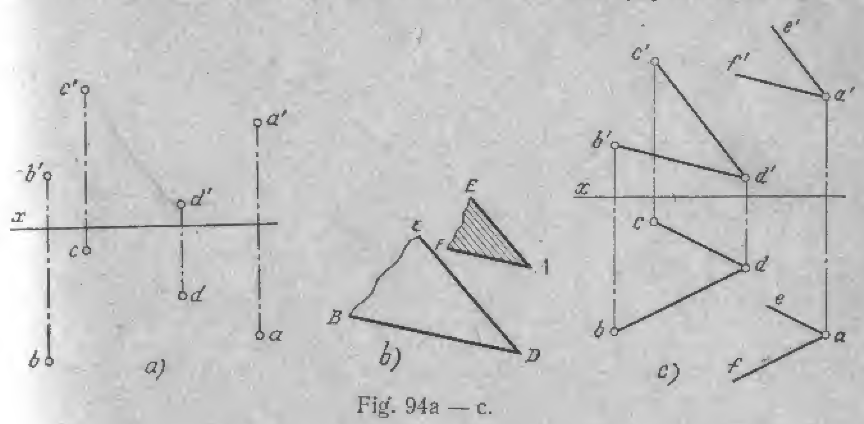


Fig. 94a — c.

y $a'e'$ paralelamente a $c'd'$, y por el punto a trazamos af paralelamente a bd y ae paralelamente a cd. Las rectas AF y AE son paralelas a las rectas BD y CD; por consiguiente, son paralelos entre sí también los planos que ellas determinan.

97*. Trazar por el punto A (fig. 95, *a*) un plano paralelo al plano P.

Solución. Como es sabido, las horizontales de planos paralelos son paralelas entre sí, también son paralelas entre sí las frontales. También las trazas homónimas de los planos paralelos son respectivamente paralelas entre sí (fig. 95, *b*).

En la fig 95, *c* expresamos el plano buscado por dos rectas, la horizontal AC y la frontal AB, para lo cual por el punto a' trazamos $a'b'$ paralelamente a P_v y $a'c'$ paralelamente al eje x, y por el punto a trazamos ac paralelamente a P_h y ab paralelamente al eje x. Puesto que la traza P_v es una de las frontales del plano P, y la traza P_h es una de sus horizontales, obtenemos el paralelismo de las horizontales y el paralelismo de las frontales de uno y otro planos, es decir, el paralelismo de estos planos. En la fig. 95, *d* se muestra la construcción de las trazas Q_v y Q_h del plano buscado. Para su construcción trazamos por el punto A la horizontal del plano

buscado paralelamente a la traza P_h y hallamos la traza frontal N (n, n') de esta horizontal. Ahora trazamos por el punto n' la traza $Q_v \| P_h$, hallamos el punto Q_x sobre el eje x y trazamos la traza Q_h paralelamente a P_h.

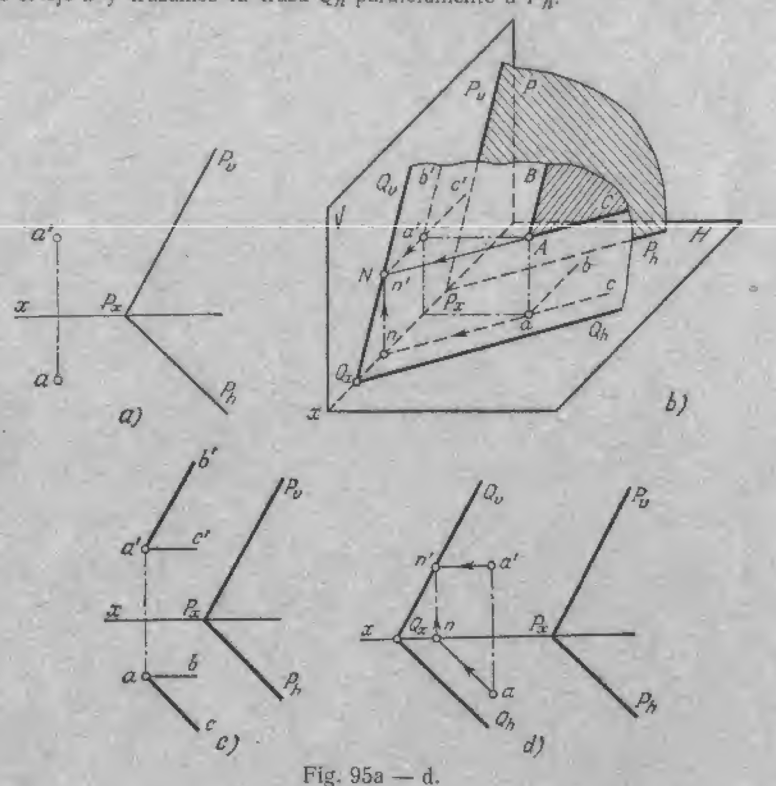


Fig. 95a — d.

98. Trazar por el punto A (fig. 96) un plano paralelo al plano dado por las rectas paralelas CD y EF; expresar el plano buscado por dos rectas que se cortan.

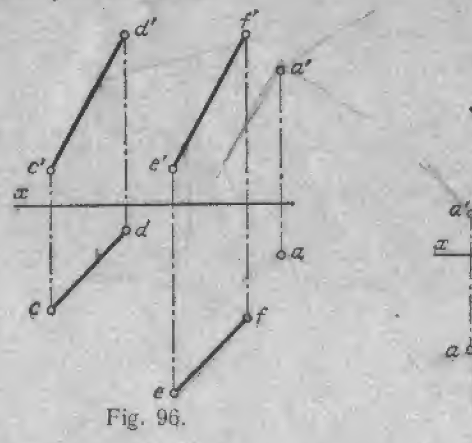


Fig. 96.

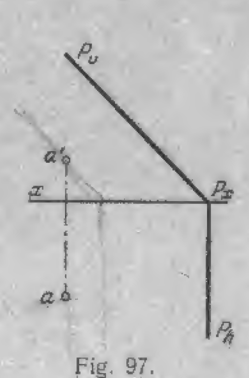


Fig. 97.

99. Trazar por el punto A (fig. 97) un plano paralelo al plano P; expresar el plano buscado por sus trazas.

100. Trazar por el punto A (fig. 98) un plano paralelo al plano P. Dar las respuestas: a) expresar el plano buscado por su horizontal y su frontal, b) por sus trazas.

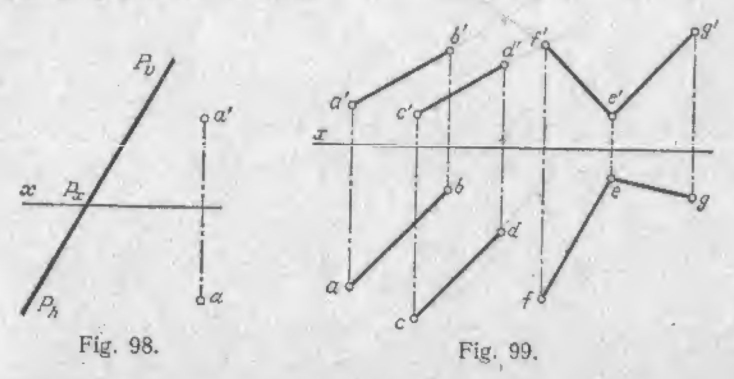


Fig. 98. Fig. 99.

101. Determinar si son paralelos dos planos, uno de los cuales está dado por las rectas paralelas AB y CD, y el otro, por las rectas que se cortan EF y EG (fig. 99).

§ 16. PERPENDICULARIDAD DE RECTA Y PLANO Y DE DOS PLANOS

102*. Trazar por el punto A una perpendicular al plano dado por las rectas AB y AC (fig. 100, a).

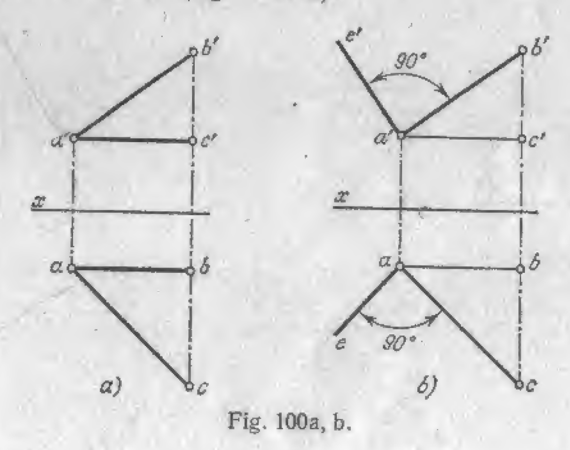


Fig. 100a, b.

Solución. Es conocido, que la proyección frontal de una perpendicular al plano es perpendicular a la proyección frontal de la frontal del plano, y la proyección horizontal de dicha perpendicular es perpendicular a la proyección horizontal de la horizontal del plano. En el dibujo (fig. 100, b) trazamos la proyección frontal de la

perpendicular $a'e'$ perpendicularmente a la proyección frontal $a'b'$ de la frontal, y su proyección horizontal ae, perpendicularmente a la proyección ac de la horizontal.

103. Trazar por el punto E una perpendicular al plano dado por las rectas paralelas AB y CD (fig. 101).

104. Trazar por el punto A una perpendicular al plano P (fig. 102).

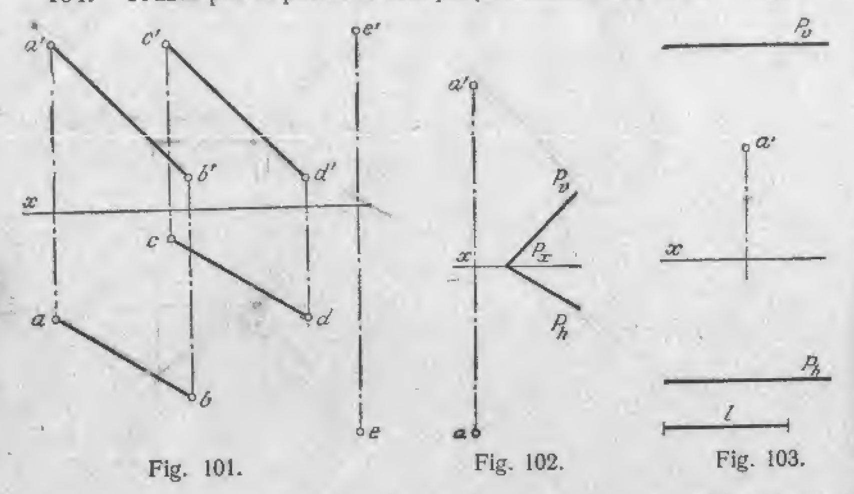


Fig. 101. Fig. 102. Fig. 103.

105. Trazar por el punto A del plano P una perpendicular a este plano y llevar sobre ella el segmento igual a l (fig. 103).

106*. Trazar por el punto A un plano perpendicular al segmento AB (fig. 104, a). Expresar el plano por sus líneas principales y sus trazas.

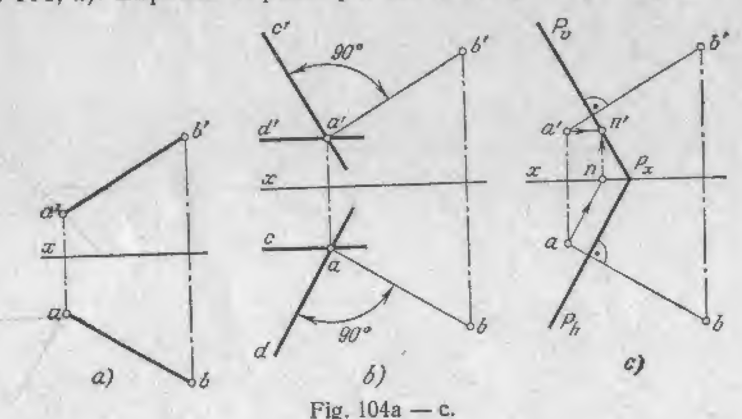


Fig. 104a — c.

Solución. Trazamos por el punto A (fig. 104, b) la frontal AC y la horizontal AD del plano buscado perpendicularmente a AB. La proyección frontal $a'c'$ de la frontal es perpendicular a $a'b'$, y la proyección horizontal ad de la horizontal es perpendicular a ab. Las rectas AC y AD determinan el plano dado. Para expresar el plano por sus trazas (fig. 104, c), construimos las proyecciones n y n' de la traza frontal de su horizontal AD. Por el punto n' trazamos la traza P_v perpendicularmente a $a'b'$, y por P_x trazamos la traza P_h perpendicularmente a ab.

107. Trazar por el punto A un plano perpendicular al segmento BC (fig. 105); no hace falta construir las trazas del plano.

108*. Trazar por la recta AB un plano perpendicular plano del triángulo CDE (fig. 106, a).

Solución. Si un plano contiene una perpendicular a otro plano, estos planos son perpendiculares entre sí. Para trazar por AB el plano buscado, hay que levantar en cualquier punto de la recta, por ejemplo en el B, una perpendicular al plano dado. Puesto que el lado CD del triángulo CDE es la frontal, y el lado CE es la horizontal (fig. 106, a), entonces, trazando $b'f' \perp c'd'$ y $bf \perp ce$ (fig 106,b), obtendremos la perpendicular al plano del triángulo CDE. Las rectas AB y BF determinan el plano buscado.

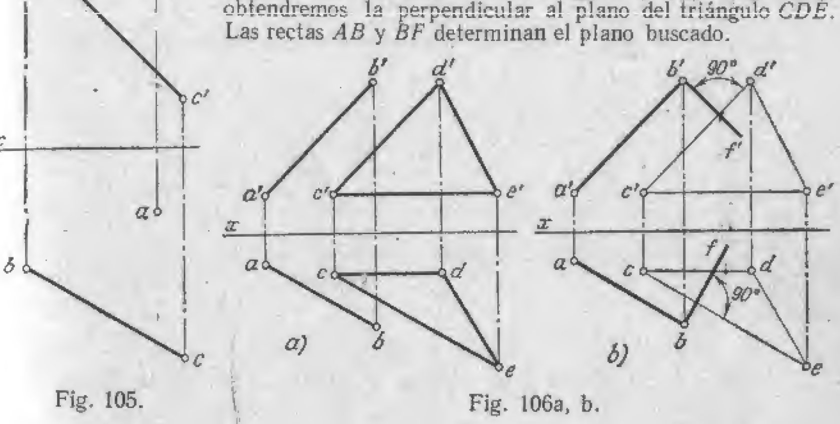


Fig. 105. Fig. 106a, b.

109. Trazar por el punto K un plano perpendicular a dos planos dados, uno de los cuales está dado por las rectas paralelas AB y CD, y el otro, por el triángulo EFG (fig. 107).

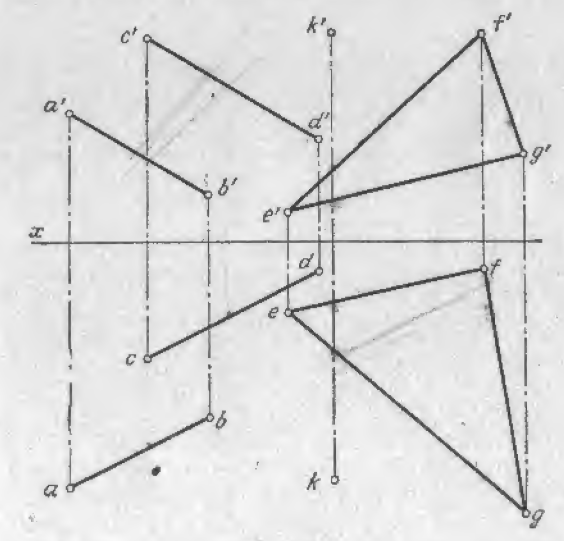


Fig. 107.

110. Determinar si serán perpendiculares entre sí dos planos: a) el plano dado por la recta BC y el punto A y el plano P (fig. 108, *a*); b) el plano del triángulo ABC y el plano dado por las rectas DE y FG (fig. 108, *b*).

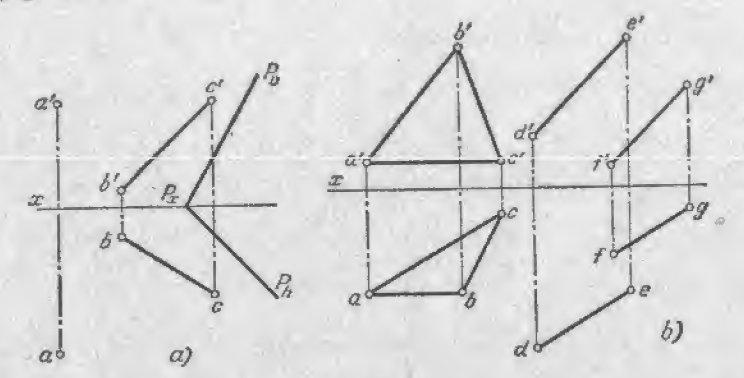


Fig. 108a, b.

§ 17. PROBLEMAS COMBINADOS SIN EL EMPLEO DE LOS MÉTODOS DE TRANSFORMACIÓN DEL DIBUJO

111*. Levantar en el punto A una perpendicular al plano dado: a) por el triángulo BCD (fig. 109, *a*); b) por sus trazas (fig. 109, *b*); c) por el triángulo BCD (fig. 109, *c*). En todos los casos construir el pie de la perpendicular en el plano dado.

Solución. a) Trazamos por el punto B (fig. 109, *d*) la frontal $B—1$ del plano dado, y por el punto D, la horizontal $D—2$. La proyección frontal de la perpendicular buscada pasa por a' perpendicularmente a $b'1'$, y la proyección horizontal pasa por a perpendicularmente a $d—2$. El pie de la perpendicular (fig. 109, *e*) se determina como el punto de intersección de esta perpendicular con el plano. Colocamos la perpendicular en un plano proyectante horizontal R (lo expresamos por su traza R_h) y hallamos la línea de intersección de este plano con el plano del triángulo (la recta NM). Obtenemos el punto k' (la proyección frontal del pie de la perpendicular) y con ayuda de este punto hallamos k.

b) En la fig. 109, *f*, la proyección frontal de la perpendicular se ha trazado bajo un ángulo recto a la traza P_v, y la proyección horizontal, bajo un ángulo recto a la traza P_h. Para construir el pie de la perpendicular colocamos ésta en un plano proyectante frontal R (fig. 109, *g*), construimos la línea de intersección de los planos R y P (la recta MN). Obtenemos el punto k (la proyección horizontal del pie de la perpendicular) y con su ayuda hallamos es punto k'.

c) Al trazar la horizontal $B—1$ (fig. 109, *c*), observamos que esta recta es paralela al eje x. De esto deducimos que el plano del triángulo es un plano proyectante de perfil. Por consiguiente, la perpendicular a este plano es una recta de perfil.

Construimos las proyecciones de perfil del triángulo y del punto A. Desde a'' trazamos una perpendicular a $c''d''$. El punto k'' es la proyección de perfil del pie de la perpendicular. Con ayuda de k'' hallamos k' y k en las proyecciones del mismo nombre de la perpendicular buscada.

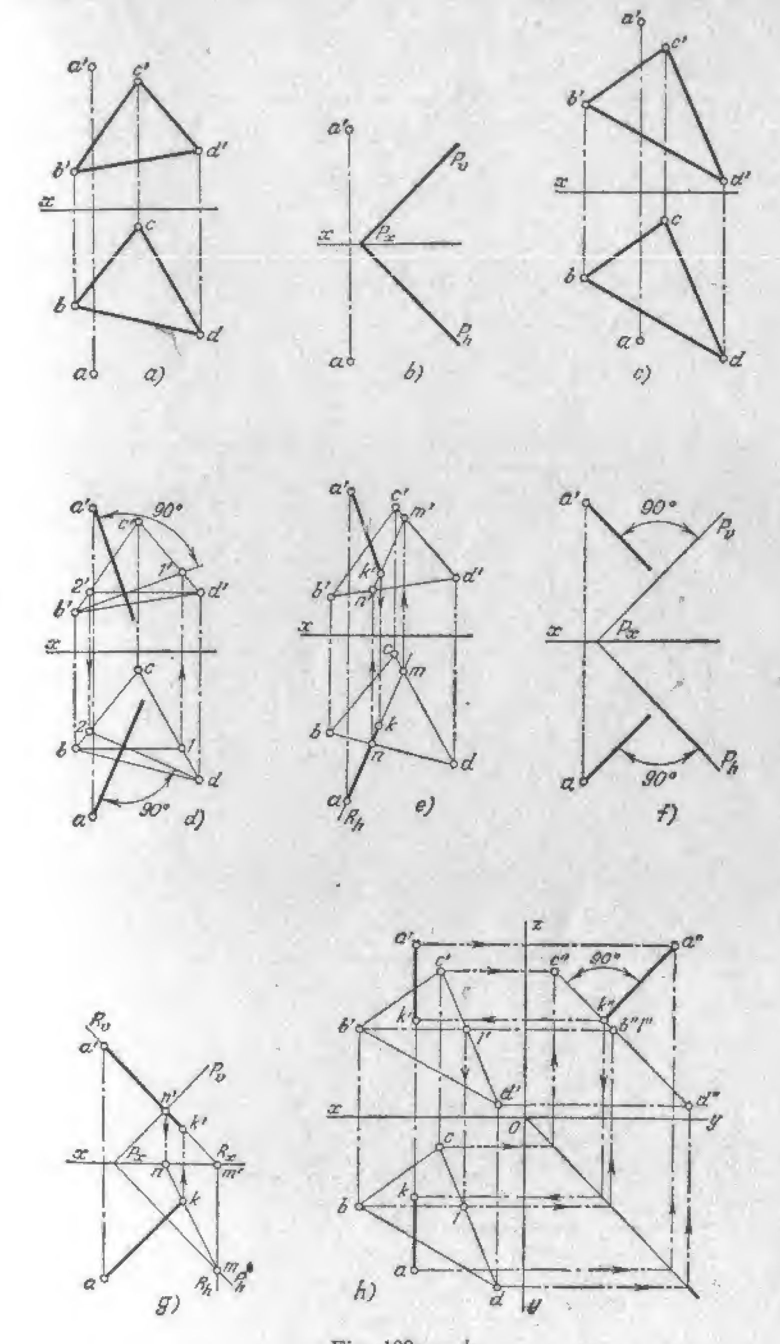


Fig. 109a — h.

112. Hallar los pies de las perpendiculares levantadas en el punto A:

a) al plano dado por las rectas paralelas BC y DE (fig. 110, *a*);
b) al plano de la cara SCD de la pirámide $SBCD$ (fig. 110, *b*);
c) al plano de la cara SBD de la pirámide $SBCD$ (fig. 110, *c*).

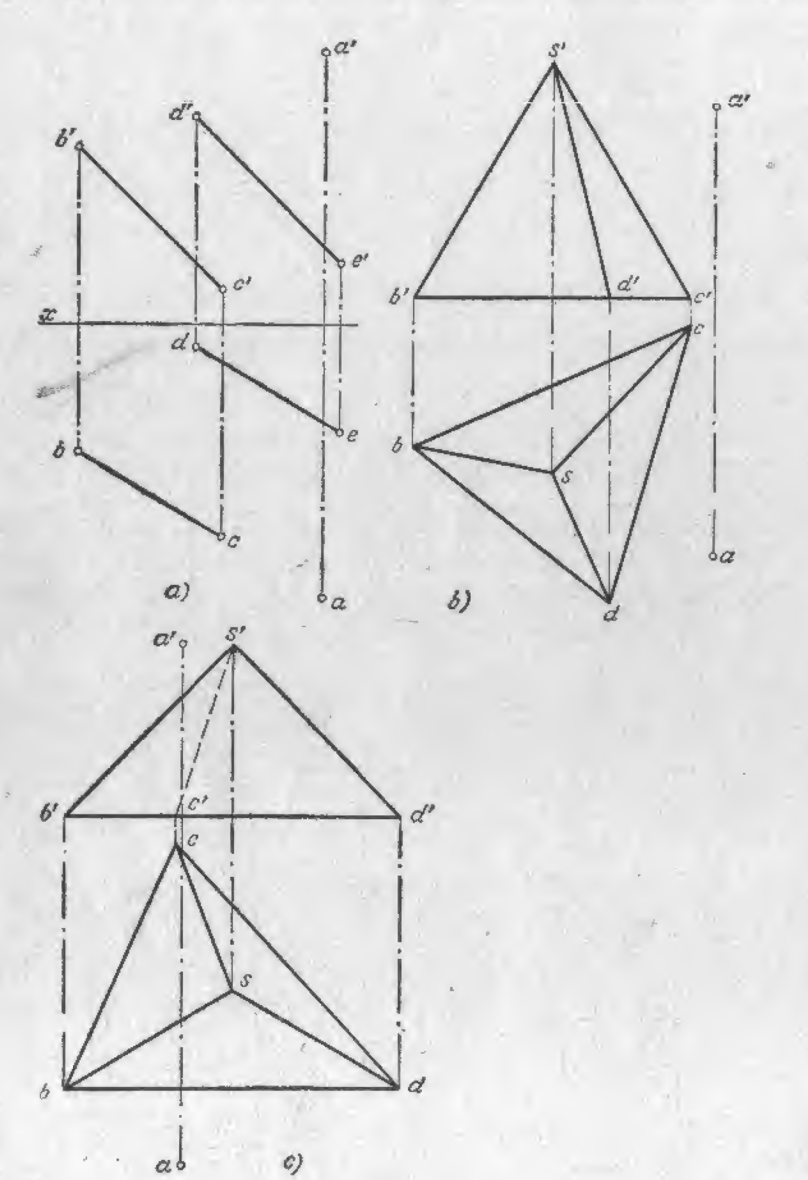


Fig. 110a — c.

113*. Construir en el plano, dado por las rectas paralelas CD y EF, el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares levantadas en los puntos de la recta AB a este plano (fig. 111, *a*).

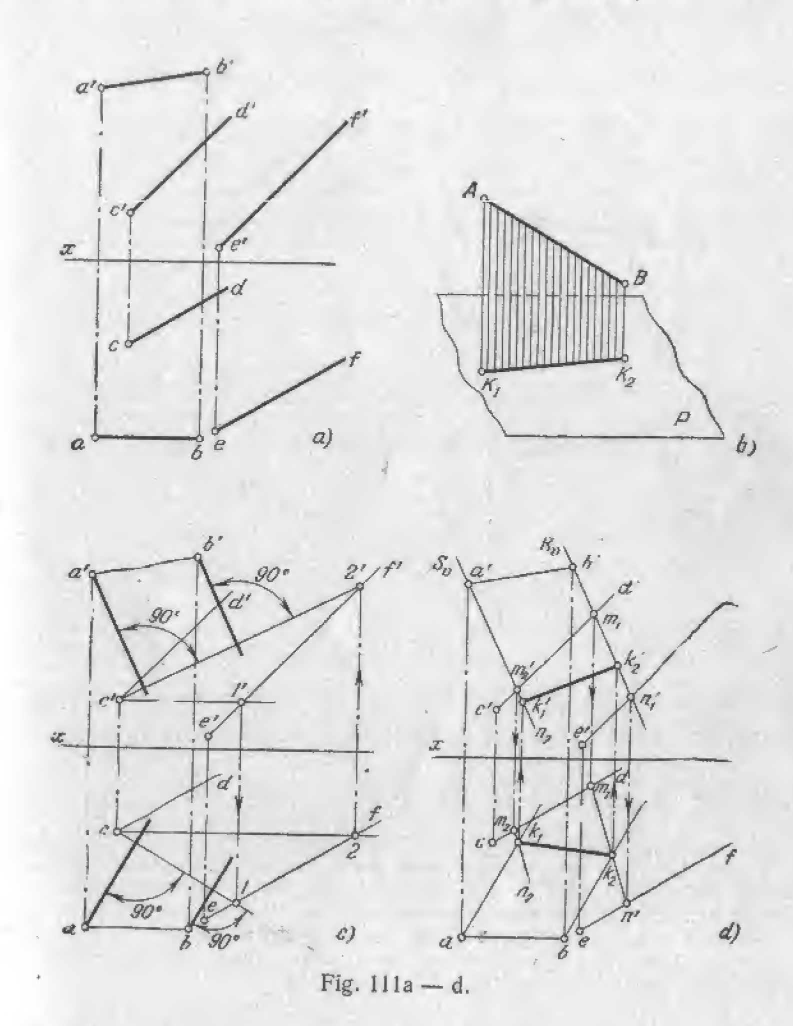


Fig. 111a — d.

Solución. El lugar geométrico buscado de los puntos es (fig. 111, *b*) la línea de intersección K_1K_2 de los planos: 1) dado y 2) del plano, perpendicular al dado, trazado por la recta AB.

Trazamos (fig. 111, *c*) en el plano dado la horizontal $C—1$ y la frontal $C—2$. Las proyecciones frontales de las perpendiculares son perpendiculares a $c'2'$, y las proyecciones horizontales son perpendiculares a $c—1$.

Para construir el lugar geométrico buscado de los puntos (fig. 111, *d*) hallamos los puntos K_1 y K_2 de intersección de las perpendiculares trazadas con el plano dado. La recta K_1K_2 es precisamente el lugar geométrico buscado.

114. Construir en el plano, dado por el triángulo *CDE*, el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares a este plano, levantadas en los puntos de la recta *AB* (fig. 112).

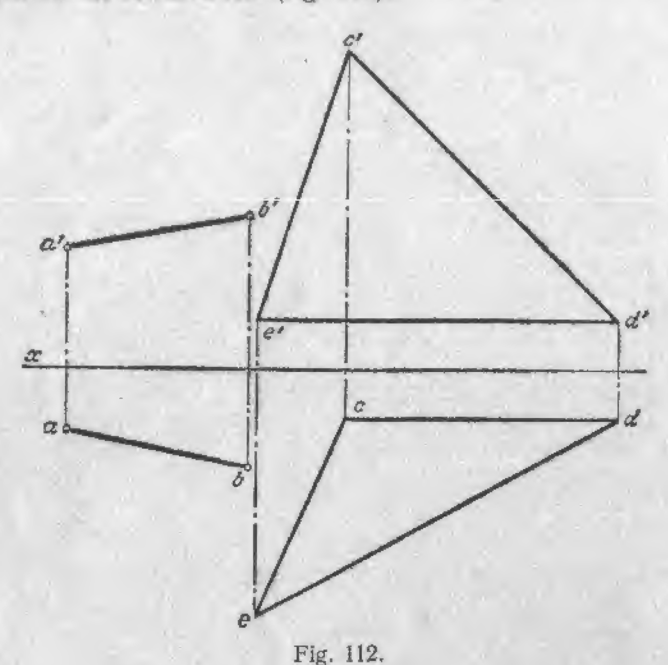


Fig. 112.

115*. Desde el vértice *A* del triángulo *ABC* trazar una perpendicular al plano de este triángulo (fig. 113, *a*) y llevar sobre dicha perpendicular un segmento de longitud *l*.

Solución. Para construir la perpendicular trazamos (fig. 113, *b*) la horizontal *A—1* y la frontal *A—2* del plano del triángulo; la proyección frontal de la perpendicular es perpendicular a *a'2'*, y su proyección horizontal es perpendicular a *a—1*.

La construcción ulterior (fig. 113, *c*) es análoga a la efectuada en el problema 20. Las rectas *a'd'* y *ad* son las proyecciones del segmento buscado.

Este problema tiene dos soluciones. En el segundo caso hay que prolongar la perpendicular hacia el lado contrario al plano dado.

116. Trazar desde el punto *D* una perpendicular al plano dado por las rectas paralelas *AB* y *CD*, y llevar sobre esta perpendicular un segmento de longitud *l* (fig. 114).

117*. Construir el lugar geométrico de los puntos alejados de cierto plano a la distancia *l*. Dar la solución para los casos en que el plano viene dado por el triángulo *ABC* (fig. 115, *a*) y por sus trazas (fig. 115, *b*).

Solución. El lugar geométrico buscado de los punto son dos planos paralelos al dado y situados a ambos lados de éste a la distancia *l*.

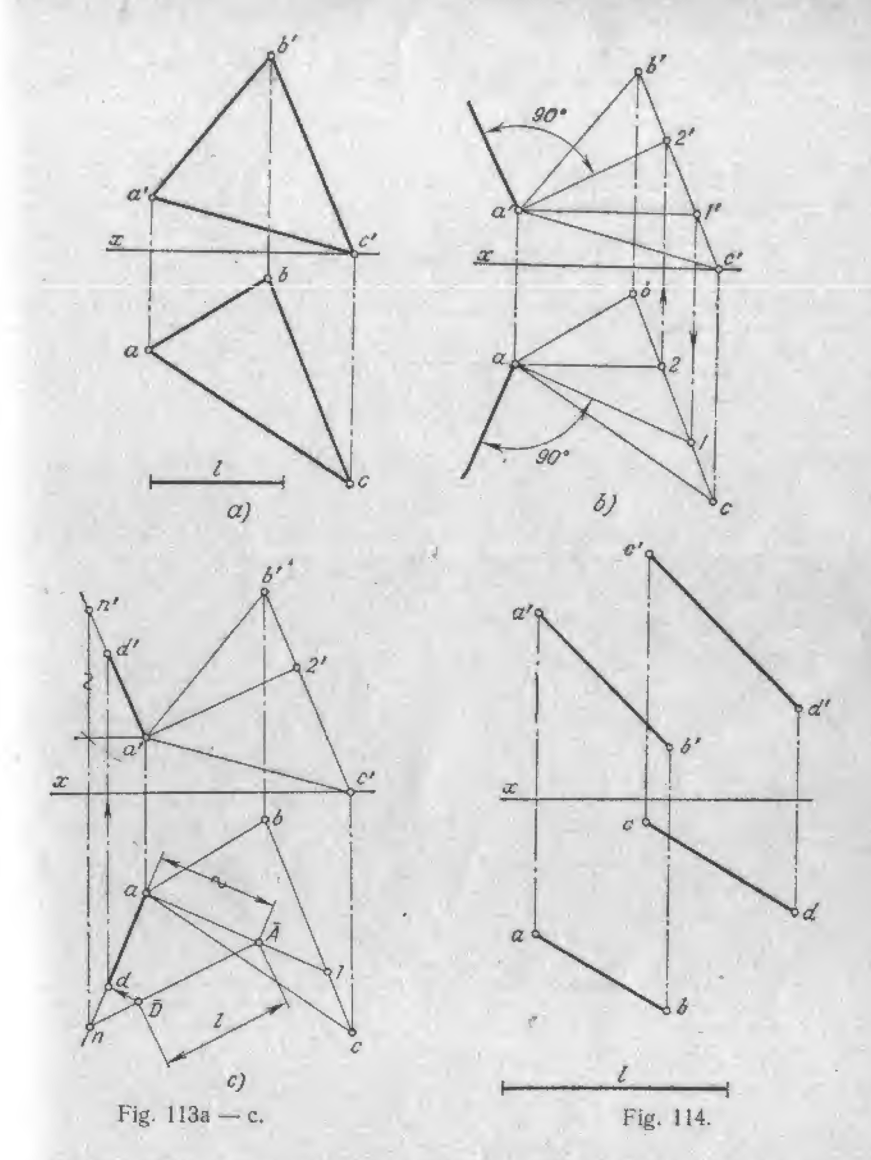


Fig. 113a — c.

Fig. 114.

En la fig. 115, *c* se muestra uno de estos planos. Para construir este plano (fig. 115, *d*) trazamos desde cualquier punto de este plano (por ejemplo, desde el *C*) una perpendicular al plano (presten atención en que en el triángulo dado el lado *AC* es la horizontal, y el *BC* es la frontal) y llevamos sobre esta perpendicular el segmento *KC* de longitud *l*. Luego, trazamos por el punto *K* (fig. 115, *e*) las rectas *KN* y *KM* paralelas aunque sea a los lados *BC* y *AC* del triángulo *ABC*.

Si el plano está dado por sus trazas (fig. 115, *b*), entonces es cómodo tomar un punto en una de las trazas. En la fig. 115, *f* se ha tomado el punto *N* sobre la traza P_v. Trazando desde este punto la perpendicular al plano *P* y llevando sobre ella un segmento igual a *l*, trazamos por el punto *K* (fig. 115, *g*) la horizontal *CD* y la frontal *AB* del plano buscado.

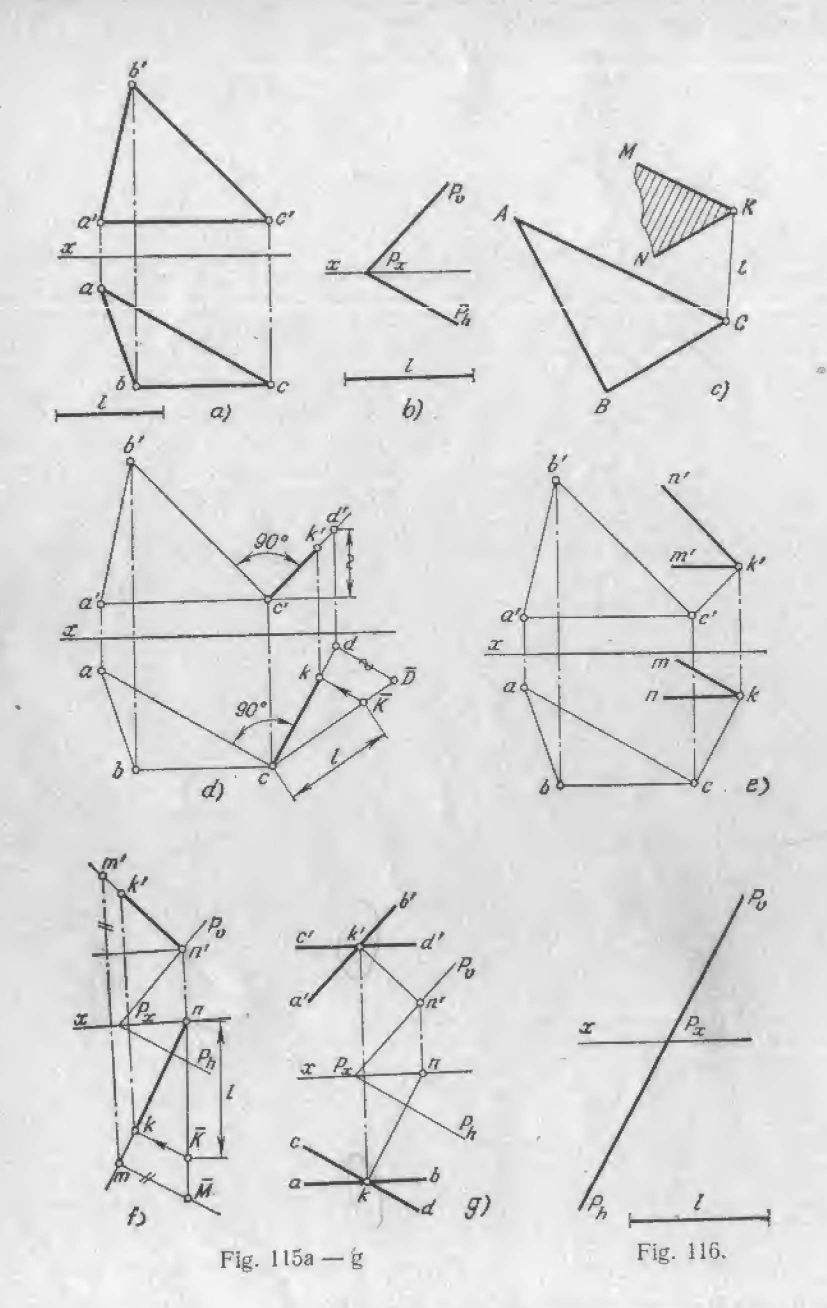


Fig. 115a — g

Fig. 116.

118. Construir el lugar geométrico de los puntos alejados del plano P (fig. 116) a la distancia l. Dar dos soluciones.

119*. En el punto A de la recta BC levantar una perpendicular hasta su intersección con la recta EF (fig. 117, a).

Solución. El lugar geométrico de las perpendiculares a la recta BC, levantadas en el punto A, es el plano P que pasa por el punto A perpendicularmente a la recta BC (fig. 117, b). El punto K de intersección de este plano con la recta EF es el punto de intersección de la perpendicular buscada con la recta EF.

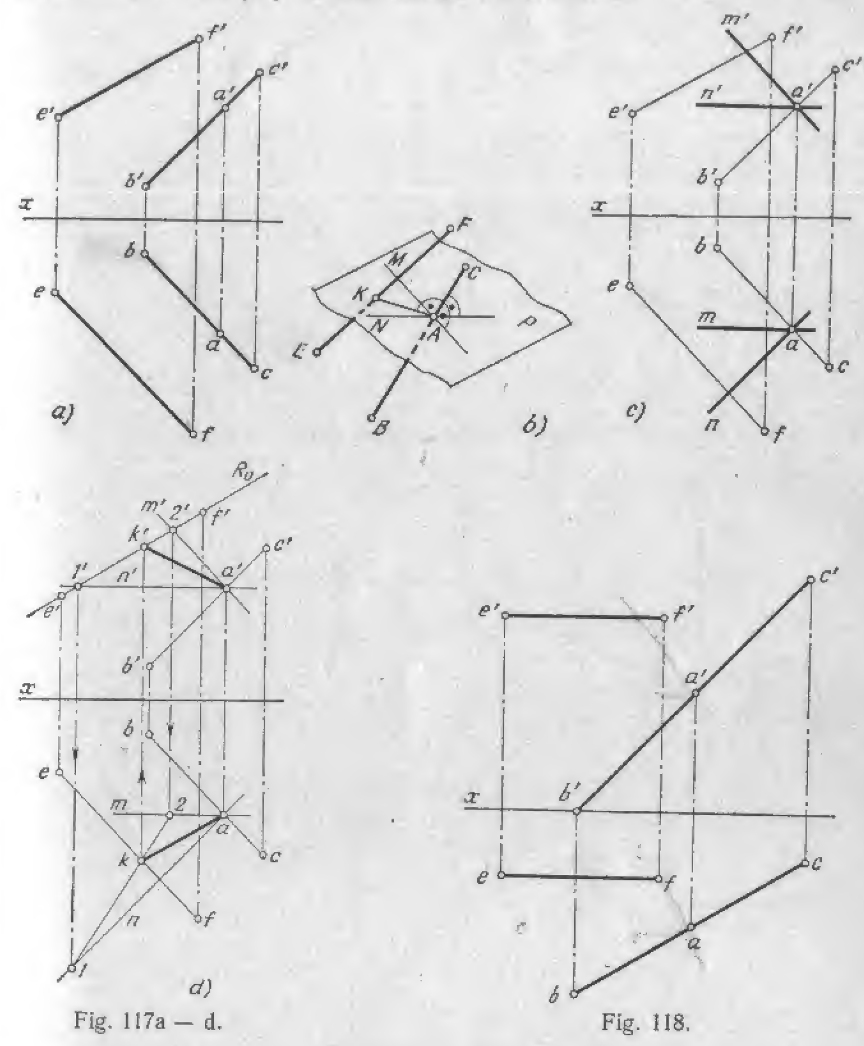


Fig. 117a — d.

Fig. 118.

En la fig. 117, c expresamos el plano, perpendicular a BC, por su frontal AM y horizontal AN. Determinamos el punto K de intersección de la recta EF con este plano (fig. 117, d), situando EF en el plano proyectante frontal R (lo expresamos por su traza R_v); $k'a'$ y ka son las proyecciones de la perpendicular buscada.

120. Levantar en el punto A la perpendicular a la recta BC hasta su intersección con la recta EF (fig. 118).

121*. Trazar por el punto A una recta que corte a las rectas BC y ED (fig. 119, a).

Solución. El lugar geométrico de las rectas que pasan por el punto A y que cortan a la recta ED es el plano dado por estos elementos (fig. 119, b). Si se construye tal plano y se halla el punto K de su intersección con la segunda recta (la BC), entonces, la recta buscada pasará por los puntos A y K. Tal construcción se ha efectuado

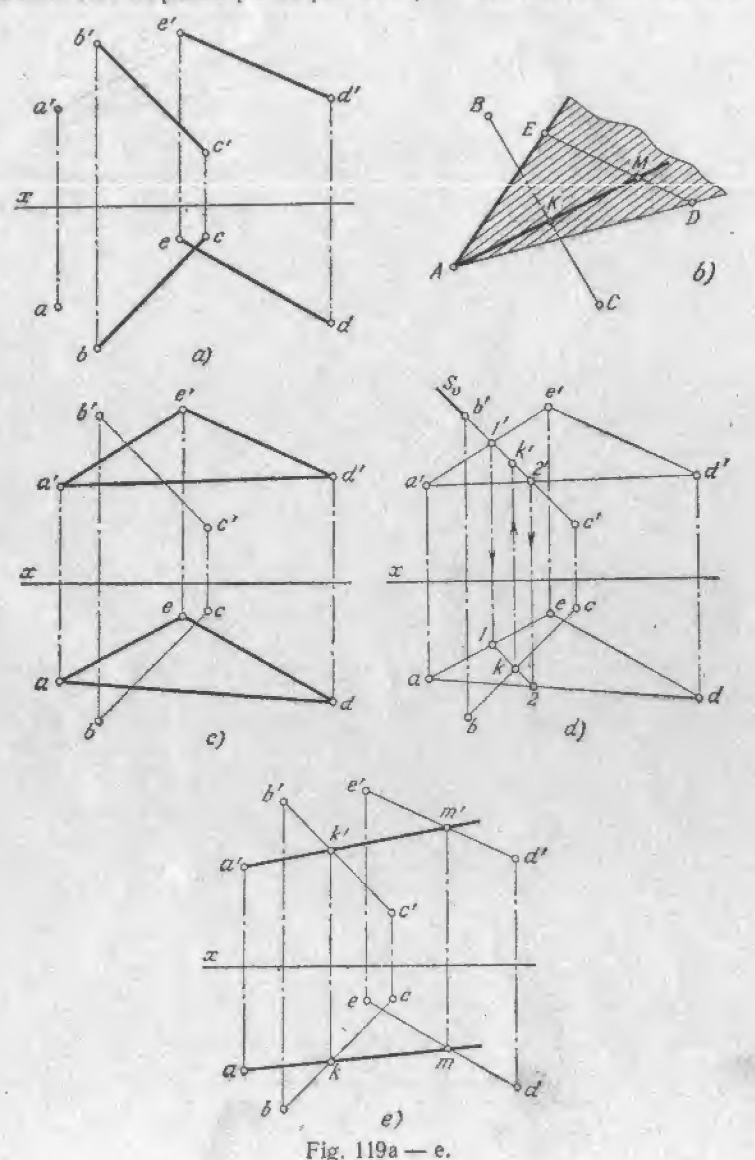


Fig. 119a — e.

en la fig. 119, c y en la fig. 119, d, donde, primeramente, el plano determinado por el punto A y la recta ED está expresado por el triángulo AED, y luego, se ha hallado el punto K de intersección de la segunda recta (BC) con el plano de este triángulo.

La recta buscada pasa por los puntos A y K y corta a la recta ED en el punto M (fig. 119, e). Claro está que si la construcción es precisa, las proyecciones m y m' deberán estar situadas sobre la línea de referencia $m'm$ perpendicular al eje x.

Este problema se puede resolver de otra manera: tomar dos planos, uno de los cuales queda determinado por el punto A y la recta ED (como se ha hecho en la fig. 119, c), y el otro, por el punto A y la recta BC. La línea de intersección de estos dos planos será precisamente la recta buscada que pasa por el punto A y que corta a las rectas BC y ED.

122. Trazar por el punto A una recta que corte:

a) a la arista SD y el lado BC de la base de la pirámide $SBCD$ (fig. 120, a),

b) a la arista BG y el lado EF de la base superior del prisma (fig. 120, b).

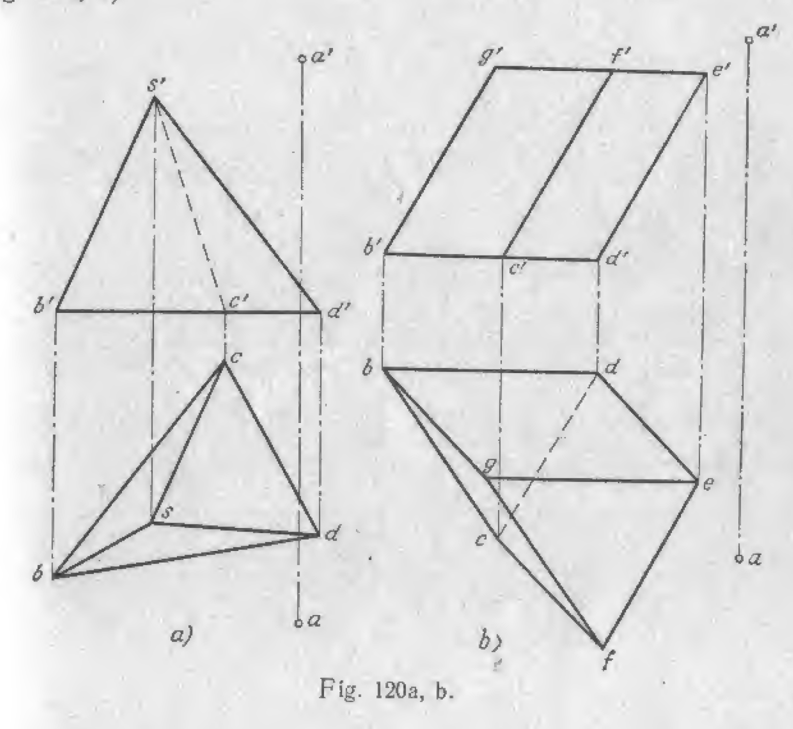


Fig. 120a, b.

123*. Construir el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los puntos A y B (fig. 121, a).

Solución. El lugar geométrico buscado es un plano que pasa por el punto medio del segmento AB perpendicularmente a éste.

Dividimos la proyección del segmento AB por la mitad (fig. 121, b). Por el punto medio (el punto C) trazamos la horizontal $CD \perp AB$ y la frontal $CE \perp AB$ (fig. 121, c) del plano buscado. Para expresar este plano por sus trazas, hay que fijar el eje de proyección y construir aunque sea la traza frontal de la horizontal (el punto N en la fig. 121, d) y trazar por ella la traza correspondiente del plano P. La traza $P_v \perp a'b'$, y la traza $P_h \perp ab$ (ó$\|nc$).

124. Construir el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los puntos A y B (fig. 122, *a* y *b*). En el primer caso, dar la respuesta sin las trazas, y en el segundo, con las trazas.

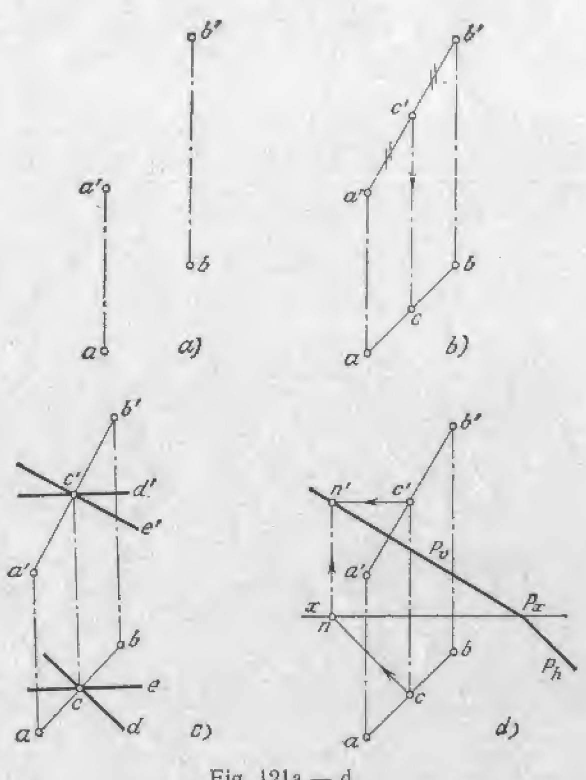


Fig. 121a — d.

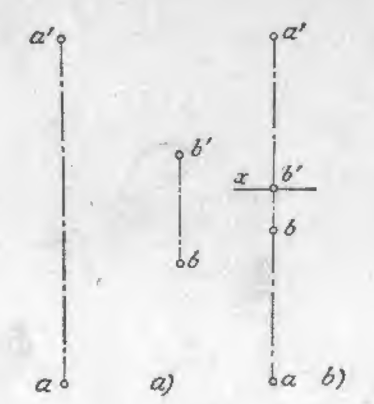


Fig. 122a, b.

125*. Construir la proyección que falta del punto K que equidista de los puntos A y B (fig. 123, *a*).

Solución. Puesto que el lugar geométrico de todos los puntos del espacio, equidistantes de los puntos A y B, es un plano que pasa por el punto medio del segmento AB perpendicularmente a éste, el punto K deberá pertenecer a este plano.

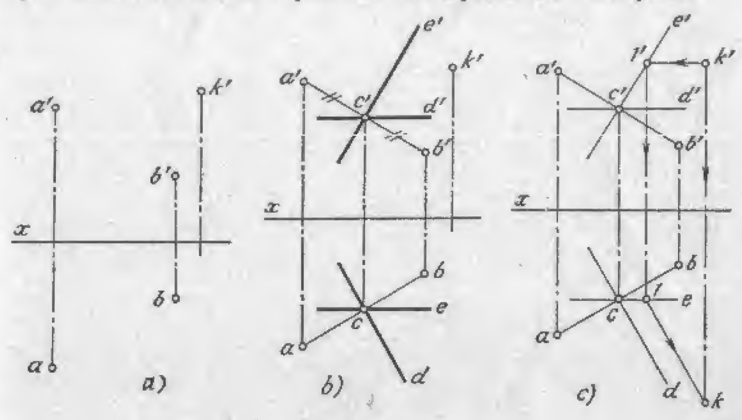


Fig. 123a — c.

En la fig. 123, *b* este plano viene determinado por la frontal CE y la horizontal CD que pasan por el punto medio del segmento AB.

Trazamos por el punto k' (fig. 123, *c*) la proyección frontal $k'1'$ de la horizontal del plano y construimos su proyección horizontal, sobre la cual señalamos el punto k, que es la proyección buscada del punto K.

126. Construir la proyección que falta del segmento CD, cada punto del cual equidista de los puntos A y B (fig. 124).

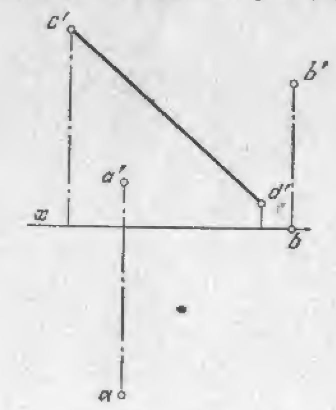


Fig. 124.

127*. Construir en un plano el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos dados A y B: a) el plano está dado por dos rectas paralelas (fig. 125, *a*); b) el plano está dado por sus trazas (fig. 125, *b*).

Fig. 125a — e.

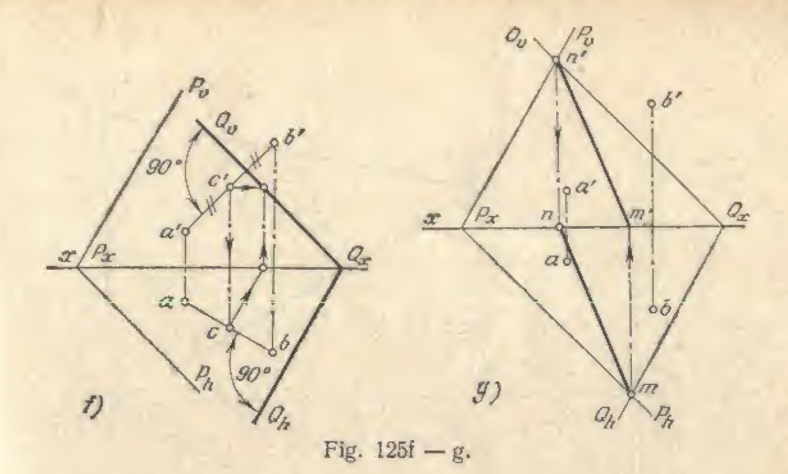


Fig. 125f — g.

Solución. Puesto que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los puntos A y B es un plano que pasa por el punto medio del segmento AB perpendicularmente a éste (fig. 125, *c*), el lugar geométrico buscado será la línea de intersección de este plano con el dado (la recta MN).

En la fig. 125, *d* el plano, perpendicular al segmento AB y que pasa por su punto medio, está expresado por la frontal KC y la horizontal TC.

Ahora hay que hallar la línea de intersección de los dos planos, lo que se ha hecho hallando los puntos de intersección de las rectas DE y FG (fig. 125, *e*), que determinan el plano dado, con el plano expresado por la horizontal TC y la frontal KC (véase el problema 86).

En la fig. 125, *f* el plano Q, perpendicular al segmento AB en su punto medio, viene expresado por sus trazas. Hallamos los puntos M y N de intersección de las trazas del mismo nombre de los planos P y Q y trazamos por ellos la recta buscada MN (fig. 125, *g*).

128. Construir el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los puntos A y B:

a) en el plano dado por el triángulo CDE (fig. 126, *a*);

b) en el plano P (fig. 126, *b*).

129 *. Vienen dados el plano del triángulo CDE y la recta AB (fig. 127, *a*). Trazar en este plano una recta que corte a AB bajo un ángulo recto.

Solución. La recta buscada se obtendrá (fig. 127, *b*) como la línea de intersección del plano del triángulo (P) con el plano Q perpendicular a AB y que pasa por el punto (K) de intersección de AB con el plano dado.

Por eso hallamos (fig. 127, *c*) el punto K de intersección de la recta AB con el plano del triángulo CDE. Como plano auxiliar se ha tomado el plano proyectante frontal R, trazado por la recta AB. Halladas las proyecciones k y k', trazamos por ellas las proyecciones de la frontal y la horizontal del plano perpendicular a AB (fig. 127, *d*). Con el fin de construir la línea buscada de intersección de los planos hallamos (fig. 127, *e*) el punto (m', m) de intersección del lado ED del triángulo con el plano trazado por el punto K. La recta MK ($m'k'$, mk) es la recta buscada.

130. Están dados la recta AB y el plano dado por las rectas paralelas CD y EF. Trazar en este plano una recta que corte a la recta AB bajo un ángulo recto (fig. 128).

131. Vienen dados la recta AB y el plano P. Trazar en este plano una recta que corte a la recta AB bajo un ángulo recto (fig. 129).

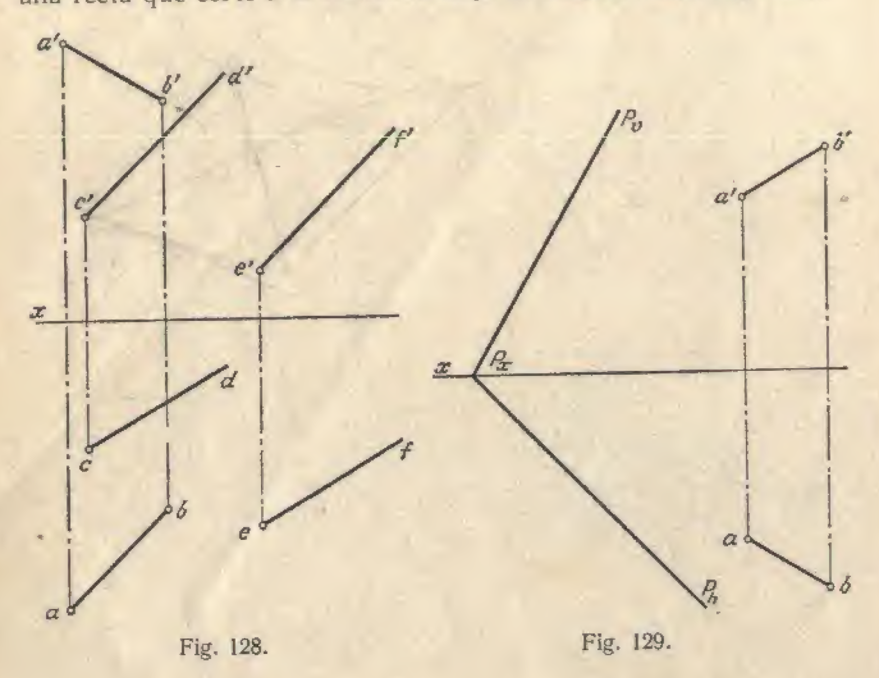


Fig. 128. Fig. 129.

132*. Vienen dados el plano del triángulo LMN y las rectas AE y FG. Construir un paralelogramo, en el cual el lado AD está situado sobre la recta AE, el lado AB es paralelo al plano del triángulo, el vértice B pertenece a la recta FG, y la diagonal BD es perpendicular al lado AD (fig. 130, *a*).

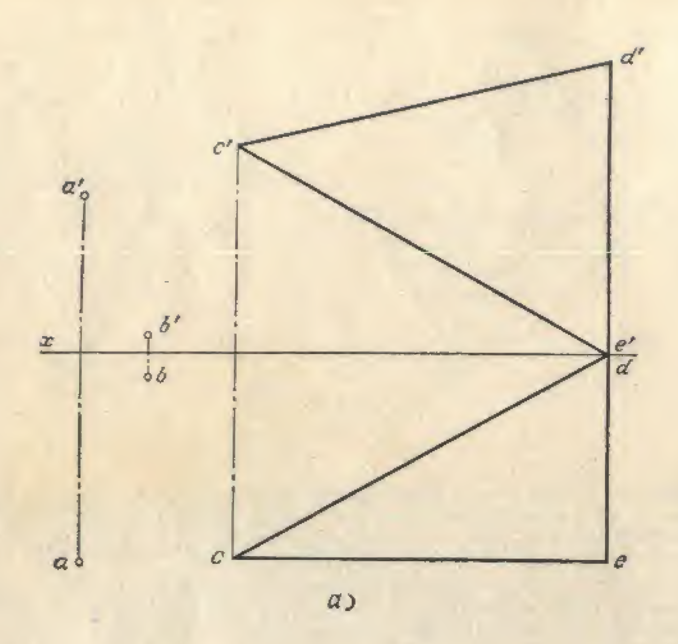
Solución. Fijemos el plan de resolución (fig. 130, *b* y *c*).

1. Trazar por el punto A el plano (P) paralelo al plano del triángulo LMN.
2. Hallar el punto de intersección (B) de la recta FG con el plano P.
3. Trazar por el punto B el plano (Q) perpendicular a la recta AE.
4. Hallar el punto de intersección (D) de la recta AE con el plano Q.
5. Trazar el segmento AB y paralelamente a éste una recta por el punto D, y por el punto B, una recta paralela a AD.

En la fig. 130, *c* y *d* se muestra la construcción del plano P paralelo al plano del triángulo LMN. El plano P, trazado por el punto A, viene dado por dos rectas que se cortan A—*1* y A—*2*, de las cuales A—*1* es paralela a LM, y A—*2* es paralela a LN.

En los mismos dibujos se muestra la determinación del punto B de intersección de la recta FG con el plano P, para lo cual por FG se ha trazado el plano proyectante frontal S dado por su traza S_v. La proyección horizontal *1*—*2* de la línea de intersección de los planos P y S corta a la proyección horizontal fg en el punto b. Con ayuda del punto b hallamos la proyección b' sobre $f'g'$.

Fig. 130a — f.



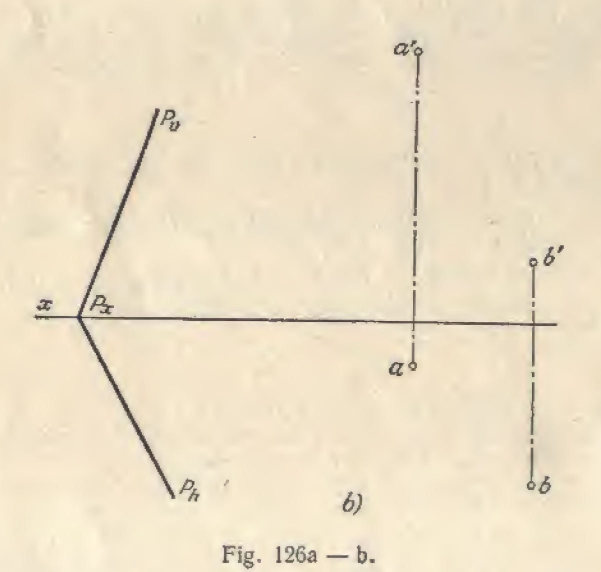


Fig. 126a — b.

Fig. 127a — e.

En la fig. 130, *e* se muestra la construcción del plano Q perpendicular a AE. Este plano se ha trazado por el punto B y se ha expresado por la horizontal $B—4$ y la frontal $B—3$, perpendiculares a AE. En el mismo dibujo se muestra la construcción del punto D, en el que la recta AE corta al plano Q expresado por la horizontal $B—4$ y la frontal $B—3$. Por AE se ha trazado el plano proyectante horizontal T expresado por su traza T_h, se han construido las proyecciones $3—4$ y $3'4'$ de la línea de intersección de los planos T y Q y las proyecciones d' y d.

En la fig. 130, *f* viene dada la construcción del paralelogramo buscado, para lo cual se han trazado las proyecciones $a'b'$ y ab, $a'd'$ y ad de dos lados del paralelogramo, y luego $b'c' \| a'd'$; $bc \| ad$; $d'c' \| a'b'$ y $dc \| ab$. Los puntos c' y c deberán estar situados sobre la línea de referencia cc' perpendicular al eje x.

133. Están dados el triángulo LMN y las rectas AE y FG. Construir un paralelogramo, cuyo lado AD se encuentra sobre la recta AE, el lado AB es paralelo al plano del triángulo, el vértice B pertenece a la recta FG, y la diagonal BD es perpendicular al lado AD (fig. 131).

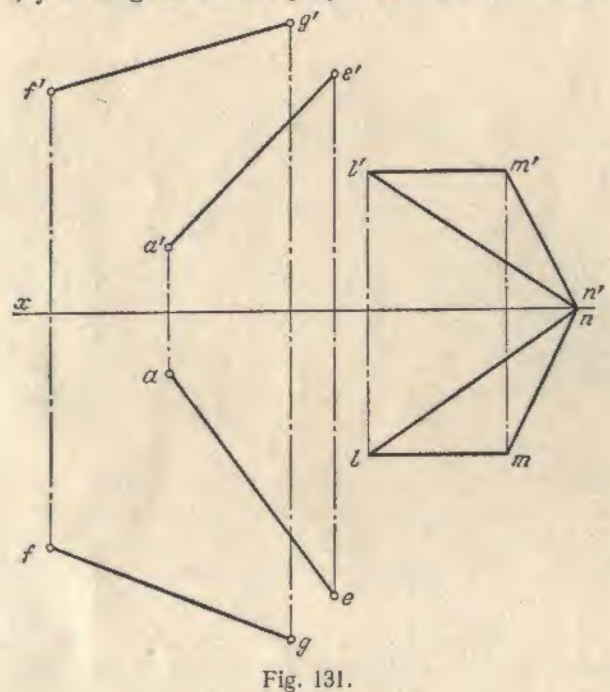


Fig. 131.

134*. Trazar por el punto A una recta paralela al plano P y al plano del triángulo CDE (fig. 132, *a*).

Solución. Si la recta buscada debe ser paralela simultáneamente a dos planos, entonces ella deberá ser paralela a la línea de intersección de estos planos (fig. 132,*b*). Introduciendo dos planos auxiliares T y S hallamos la línea de intersección MN de los planos (fig. 132, *c*). Las proyecciones de la recta buscada $b'f'$ y bf pasan por a' y a paralelamente a las proyecciones del mismo nombre de la recta MN (fig. 132, *d*).

135. Trazar por el punto A una recta paralela al plano P y al plano dado por las rectas que se cortan DE y DF (fig. 133).

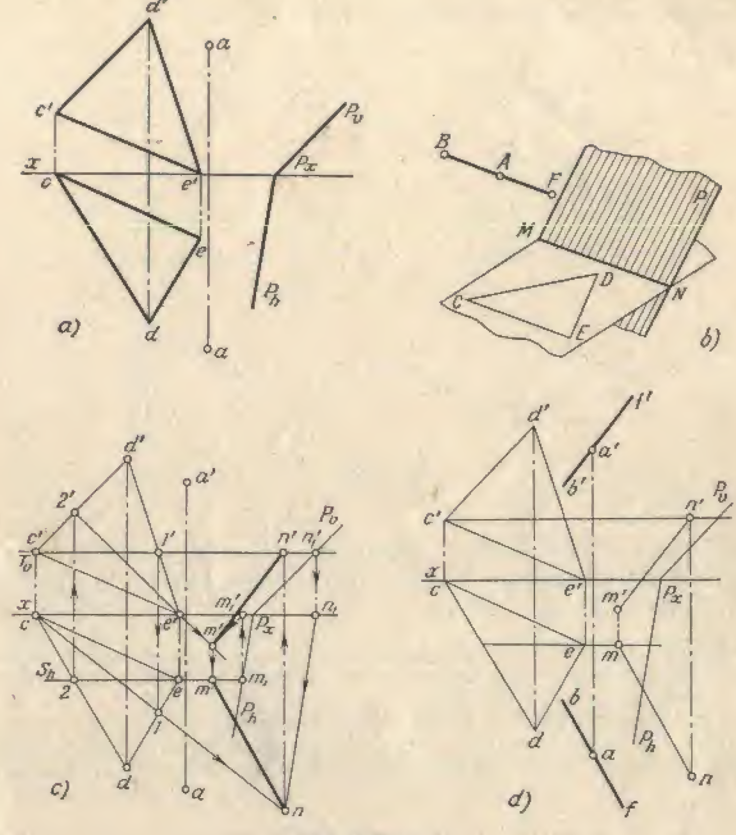


Fig. 132a — d.

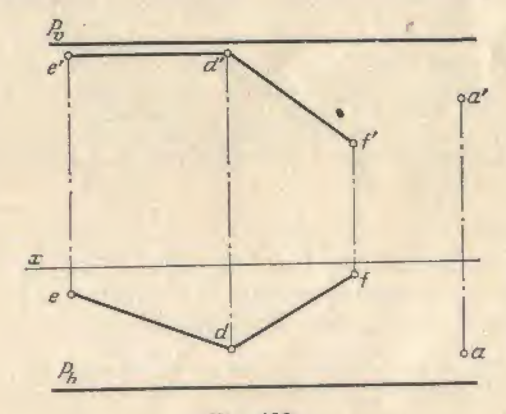


Fig. 133.

136. Trazar por el punto A una recta paralela al plano P y al plano dado por las rectas paralelas DE y FG (fig. 134).

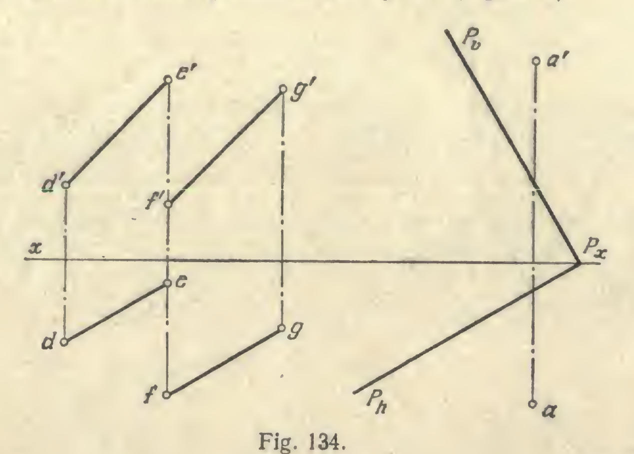


Fig. 134.

137*. Trazar unas rectas, cada una de las cuales se encuentra a la distancia l_1 del plano P, y a la distancia l_2 del plano dado por la recta BC y el punto A (fig. 135, *a*).

Solución. La resolución de este problema se basa en la noción sobre el lugar geométrico de las rectas que se encuentran a una distancia determinada del plano dado, es decir, de un plano paralelo al dado.

Las rectas buscadas son las líneas MN de intersección de dos planos Q, paralelos al plano P y situados a ambos lados de éste a la distancia l_1, con dos planos S paralelos al segundo de los planos dados y que se encuentran a la distancia l_2 de éste. En total tales rectas pueden ser cuatro. En la fig. 135, *b* viene representada una de ellas.

En la fig. 135, *c* se muestra: 1) el trazado de la perpendicular al plano P desde un punto M_1 tomado en este plano y la construcción del punto K_1, sobre ésta perpendicular, a la distancia $M_1K_1=l_1$; 2) el trazado de la perpendicular al plano dado por el punto A y la recta BC, desde el punto A (con ayuda de la horizontal $A—2$ y la frontal $A—3$) y la construcción del punto K_2, sobre esta perpendicular, a la distancia $AK_2=l_2$.

En la fig. 135, *d* se muestra el trazado, por el punto K_1, del plano Q paralelamente al plano P, y por el punto K_2, el plano S expresado por la horizontal $K_2\,5$ y la frontal $K_2\,6$ paralelas respectivamente a la horizontal $A—2$ y la frontal $A—3$ pertenecientes al plano dado por el punto A y la recta BC.

En la fig. 135, *e* se ha construido la línea de intersección del plano Q con el plano S expresado por la horizontal $K_2\,5$ y la frontal $K_2\,6$. La recta obtenida MN es paralela a ambos planos dados.

138. Trazar una de las rectas que se encuentran a la distancia l_1 del plano P, y a la distancia l_2 del plano del triángulo ABC (fig.136).

139*. Trazar una recta que corte a las rectas dadas AB y CD y que sea paralela a la recta EF (fig. 137, *a*).

Solución. Fijemos el plan de resolución del problema (fig. 137, *b*).

1. Trazar por la recta CD un plano (Q) paralelo a la recta EF.
2. Hallar el punto (K) en el que la recta AB corta al plano Q.

Fig. 135a — e.

3. Trazar por el punto K una recta (KM) paralela a la recta dada EF.

En la fig. 137, *c* se muestra la construcción del plano Q que pasa por la recta CD y que es paralelo a la recta EF. El plano Q está expresado por la recta CD y la recta DG que corta a ésta y que está trazada por el punto D paralelamente a EF.

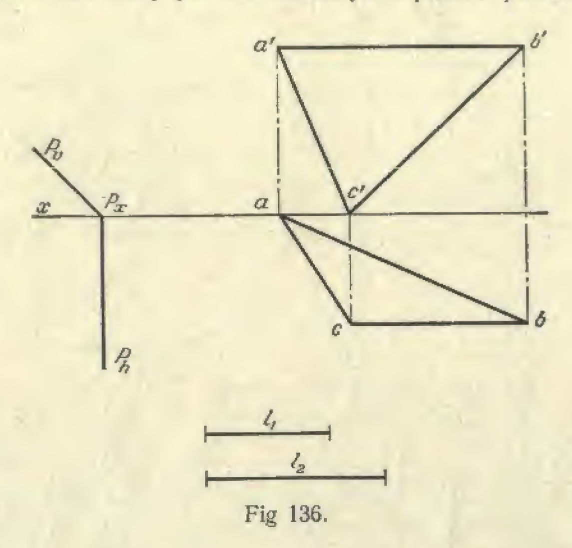


Fig 136.

En la fig. 137, *d* se muestra la construcción del punto K en el que la recta AB corta al plano Q. La recta AB está situada sobre el plano proyectante frontal R expresado por su traza R_v. El plano R corta al plano Q según la recta *1—2*. En la intersección de *1—2* y ab se obtiene la proyección k; con ayuda del punto k hallamos la proyección frontal k'.

Finalmente, en la fig. 137, *e* vienen dadas las proyecciones km y $k'm'$ de la recta buscada: $k'm' \| e'f'$ y $km \| ef$. Claro que las proyecciones m' y m deberán obtenerse sobre la línea de referencia $m'm$ perpendicular al eje x.

140. Trazar una recta que corte a las rectas dadas AB y CD y que sea paralela a la recta EF (fig. 138).

141. Trazar una recta que corte a las rectas dadas AB y CD y que sea paralela a la recta EF (fig. 139).

142*. Vienen dadas las rectas EF, MN, KL y HI. Construir el rectángulo $ABCD$, en el cual el lado AB es paralelo a la recta EF, el vértice A se encuentra sobre la recta KL, el vértice B, sobre la recta MN y el vértice C, sobre la recta HI (fig. 140, *a*).

Solución. El lado AB debe cortar a KL y MN y ser paralelo a EF (véase el problema 139).

Si se traza (fig. 140, *b*), por ejemplo, por el punto G, perteneciente a KL, una recta paralela a EF, obtendremos el plano Q paralelo a EF. Luego hay que hallar el punto B de intersección de este plano con la recta MN y trazar por el punto B en el plano Q una paralela a EF. Esta recta AB corta a las rectas MN y KL y es paralela a EF.

La construcción se muestra en la fig. 140, *c*. Puesto que los lados BC y AB deben ser perpendiculares entre sí, trazamos por el punto B (fig. 140, *d* y *e*) el plano P per-

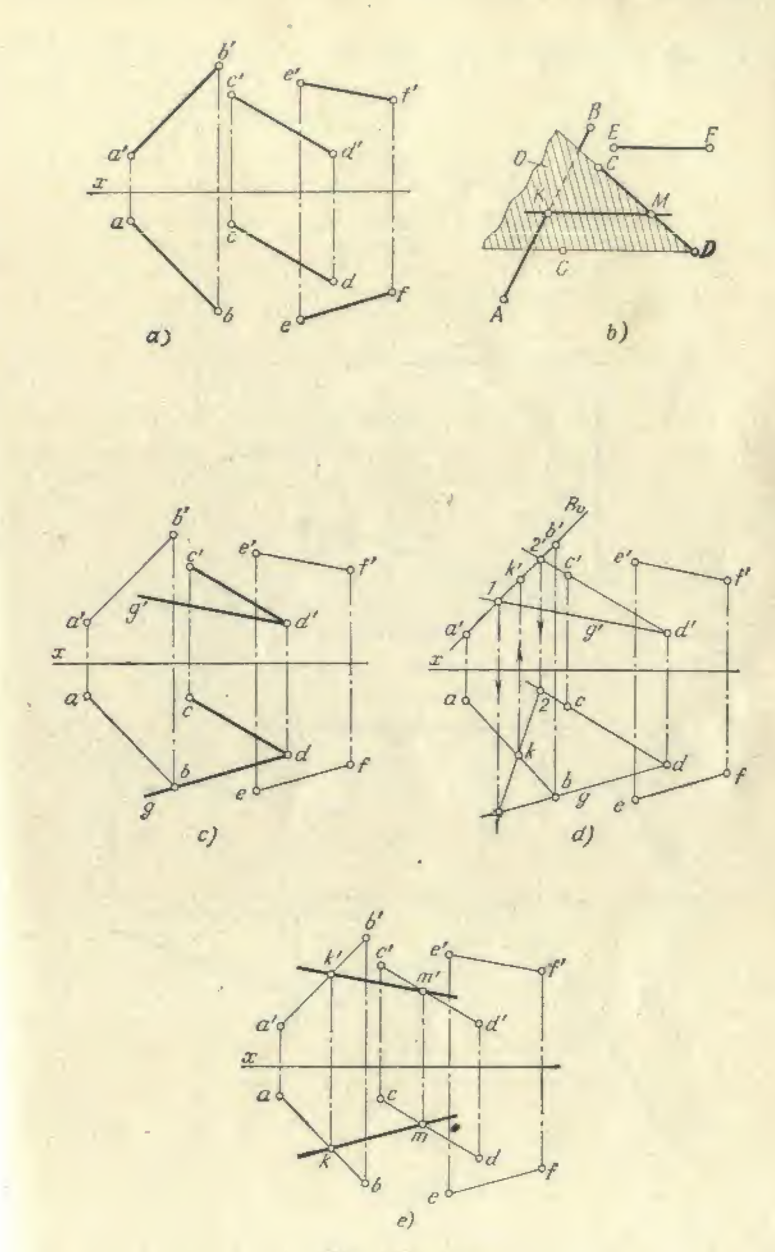


Fig. 137a — e.

pendicular al lado AB y construimos el punto C de intersección de este plano con la recta HI.

Trazamos por los puntos A y C rectas (fig. 140, *d* y *e*) paralelas a las rectas BC y AB, hasta su intersección en el punto D.

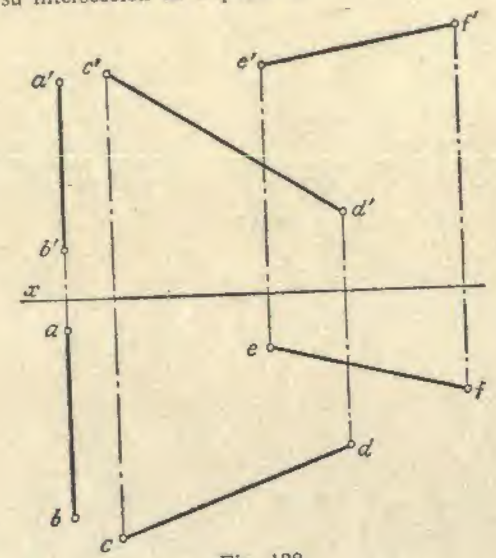


Fig. 138.

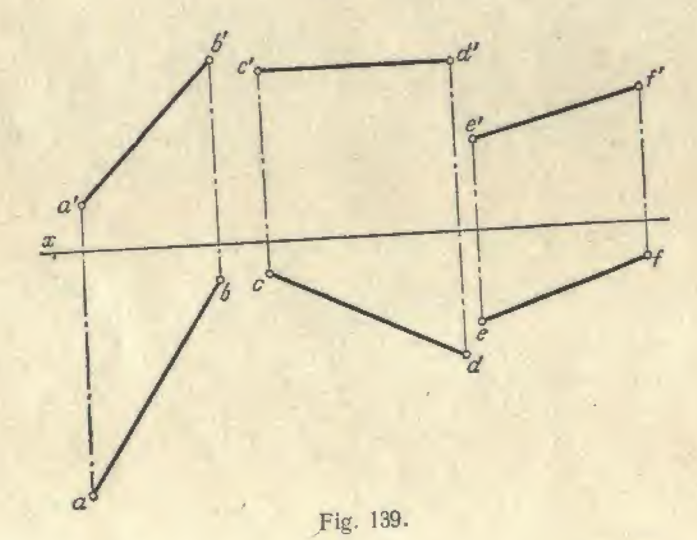


Fig. 139.

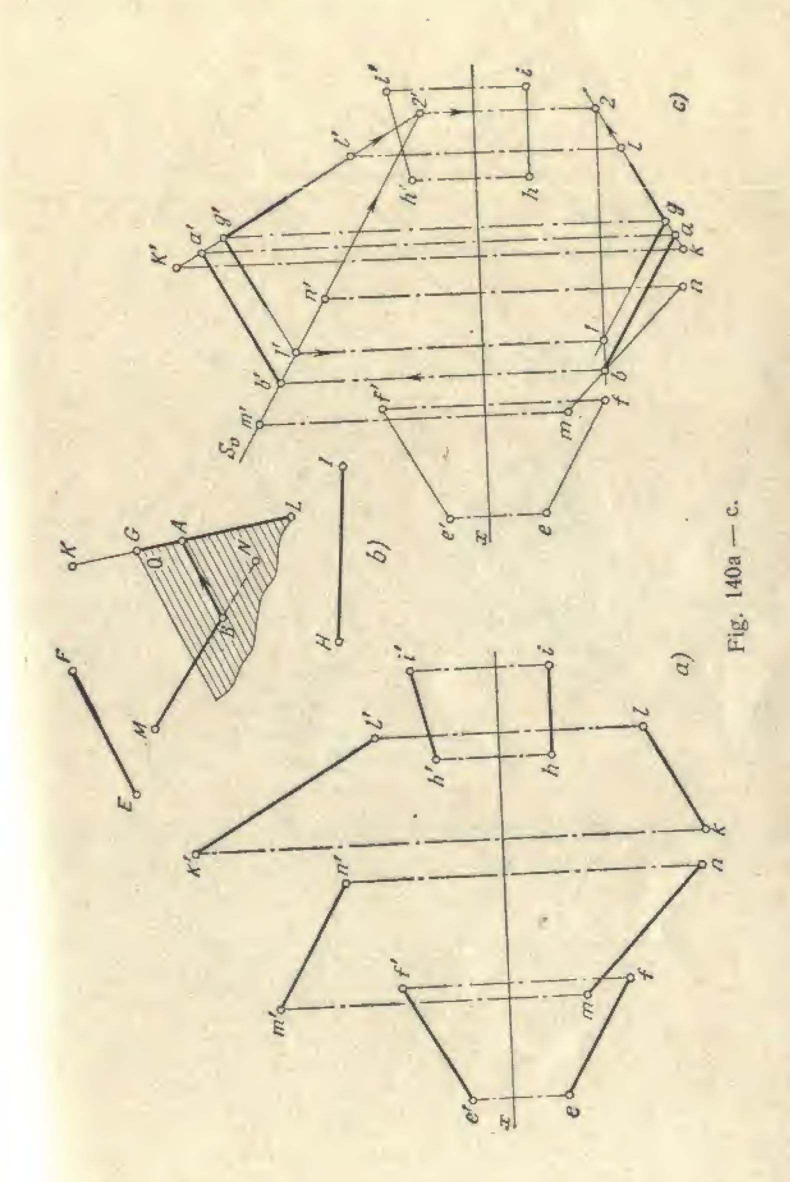


Fig. 140a — c.

143. Vienen dadas la pirámide $SEFG$ y la recta MN (fig. 141). Construir el rectángulo $ABCD$, en el cual el lado AB es paralelo a la recta MN, el vétrice A se encuentra sobre la arista SF, el vértice B, sobre el lado EG de la base y el vértice D, sobre la arista SE.

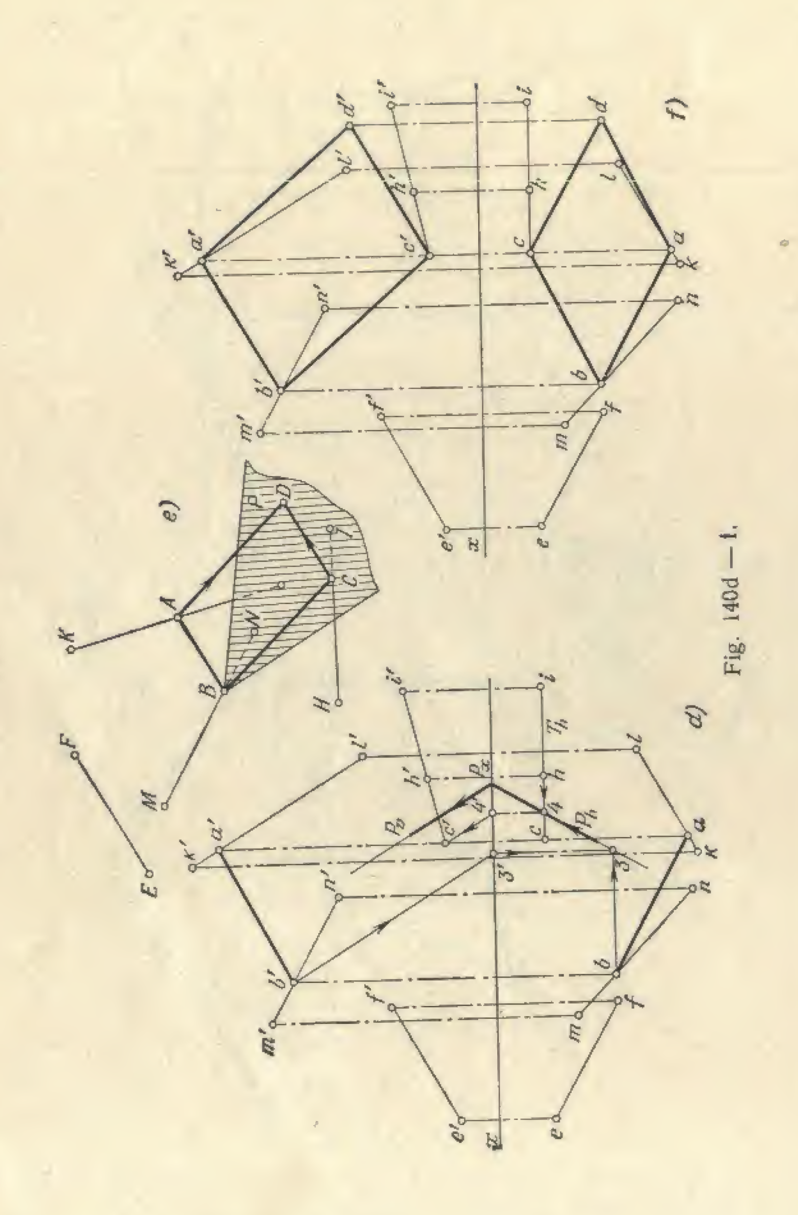


Fig. 140d — f.

144. Están dadas la pirámide *SEFG* y la recta *MN* (fig. 142). Construir el rectángulo *ABCD*, en el que el lado *AB* es paralelo a la recta *MN*, el vértice *A* se encuentra sobre la arista *SG*, el vértice *B*, sobre el lado *EF* de la base y el vértice *D*, sobre la arista *SF*.

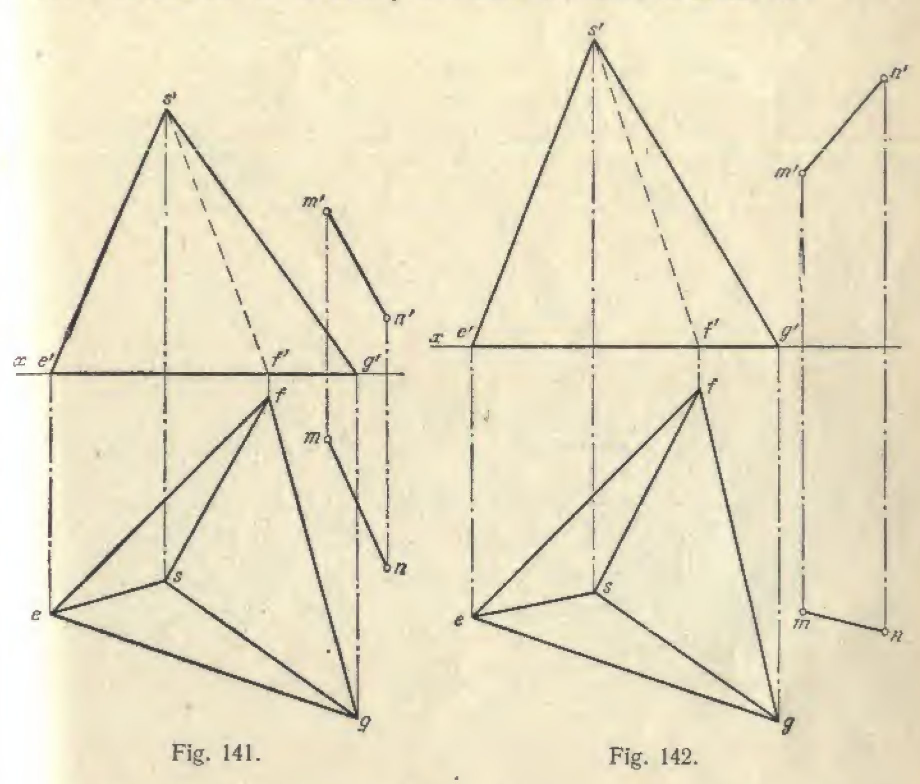


Fig. 141. Fig. 142.

145*. Trazar por el punto *A* una recta paralela al plano dado por las rectas paralelas *ED* y *FG*, y que corte a la recta *BC* (fig. 143, *a*).

Solución. Se puede hacer el siguiente plan de resolución del problema (fig. 143, *b*):

1) trazar por el punto *A* un plano (*P*) paralelo al plano dado;
2) hallar el punto (*K*) de intersección de *BC* con el plano *P*;
3) trazar la recta buscada *AK*.

En la fig. 143, *c* el plano *P*, trazado por el punto *A*, viene expresado por la recta $AM \| ED (a'm' \| e'd', am \| ed)$ y la horizontal *AN*. Para trazar la proyección horizontal de este plano se ha tomado la horizontal *E—1* en el plano dado por las rectas *ED* y *FG*($an \| e1$). En la fig. 143, *d* se muestra la construcción del punto *K* en el que la recta dada *BC* corta al plano *P*: por *BC* se ha trazado un plano proyectante frontal (expresado por su traza R_v), se han construido las proyecciones *2'3'* y *2—3* de la recta de intersección de los planos *P* y *R*, se ha obtenido el punto *k* en la intersección de la recta *2—3* con *bc*. Con ayuda de la proyección *k* se ha hallado la proyección *k'*. Las proyecciones de la recta buscada son *a'k'* y *ak*.

146. Trazar por el punto *A* (fig. 144) una recta, paralela al plano *P*, que corte a la recta *BC*.

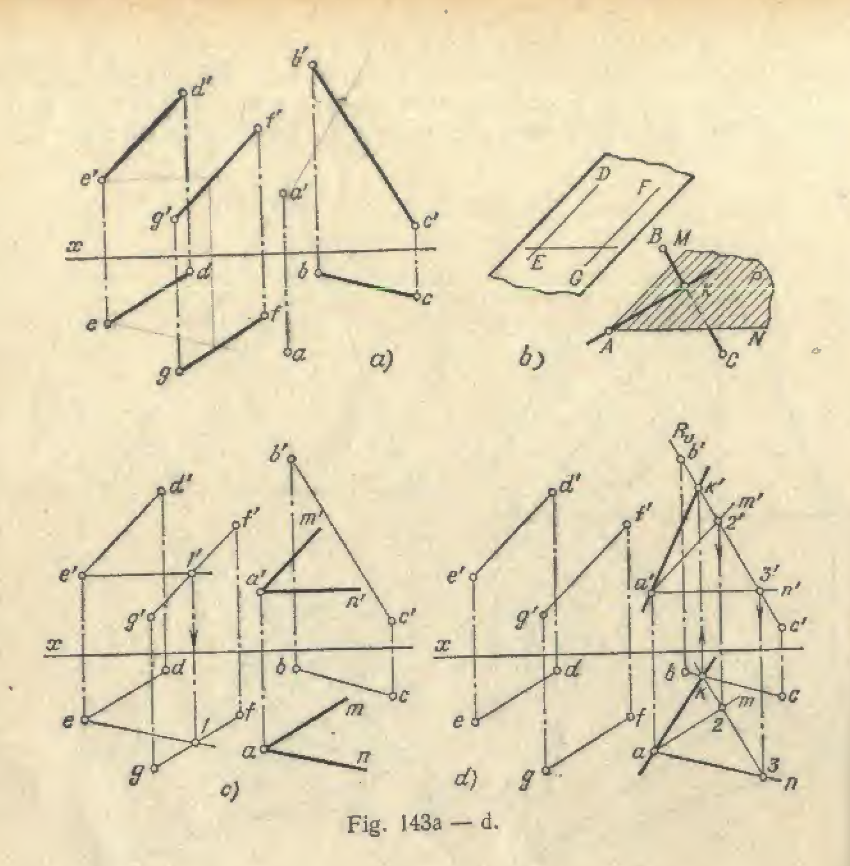


Fig. 143a — d.

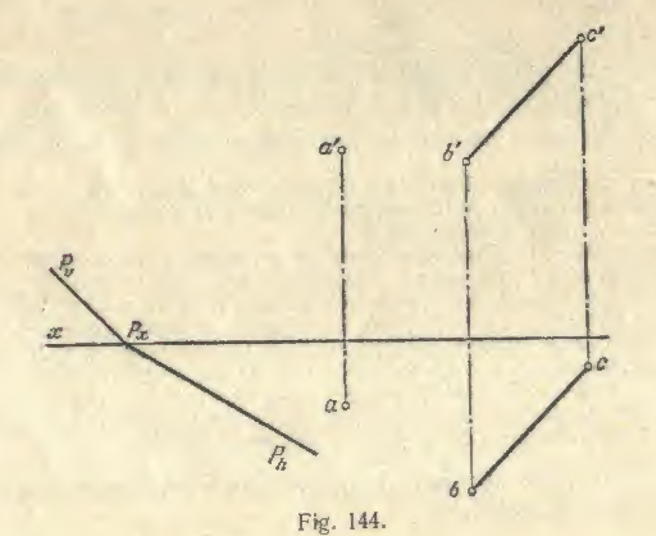


Fig. 144.

147. Trazar por el punto A (fig. 145) una recta que sea paralela al plano dado por las rectas que se cortan DE y DF, y que corte a la recta BC.

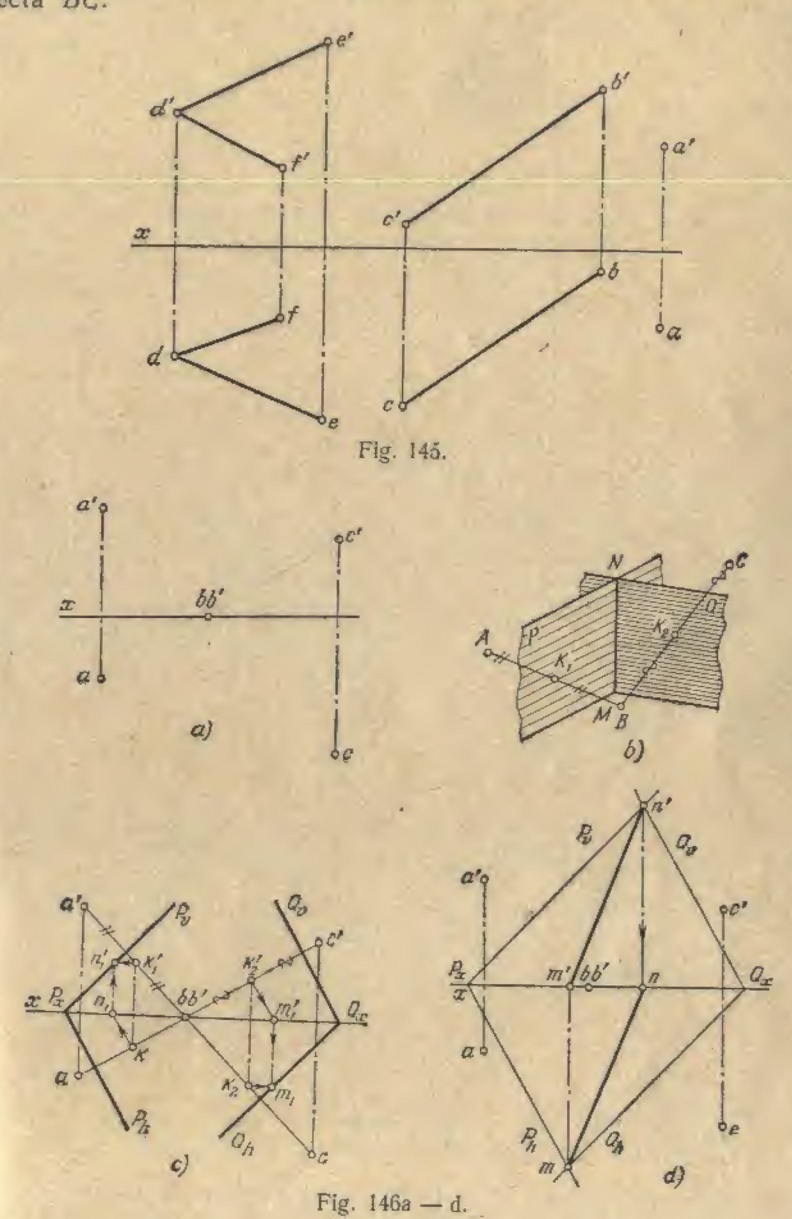


Fig. 145.

Fig. 146a — d.

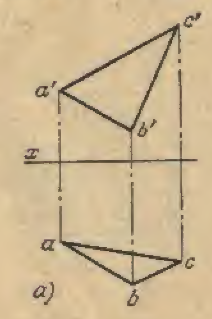
148*. Construir el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los puntos dados A, B y C (fig. 146, a).

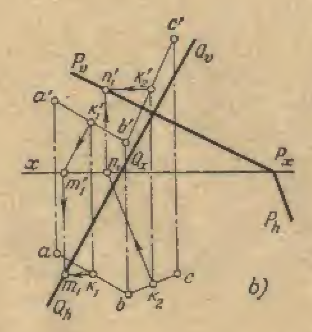
Solución. El lugar geométrico buscado es la línea de intersección MN (fig 146, *b*) de los planos P y Q, perpendiculares respectivamente a los segmentos AB y BC y que pasan por los puntos medios K_1 y K_2 de estos segmentos. En la fig. 146, *c* estos planos vienen expresados por sus trazas. Valiéndonos (fig. 146, *d*) de los puntos de intersección de las trazas del mismo nombre de los planos, construimos su línea de intersección MN.

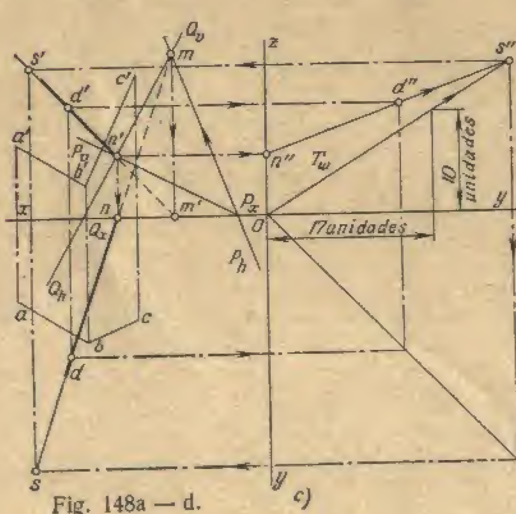
149. Construir el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los puntos dados A, B y C (fig. 147).

150*. Viene dado el triángulo ABC (fig. 148, *a*). Construir la pirámide $SABC$, cuyo vértice S equidista de los puntos A, B y C. La distancia desde el punto S hasta el plano V es 1,7 veces mayor que la distancia desde este mismo punto hasta el plano H.

Fig. 147.







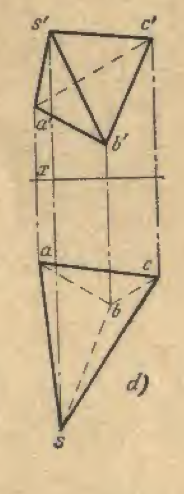


Fig. 148a — d.

Solución. El lugar geométrico de los puntos equidistantes de los puntos A, B y C (véase el problema 148*) es la línea de intersección MN de los planos P y Q trazados por los puntos medios (K_1 y K_2) de los segmentos AB y BC perpendicularmente a éstos (fig. 148, *b* y *c*). El vértice S debe encontrarse sobre esta recta. El lugar geométrico de los puntos cuya ordenada es 1,7 veces mayor que su Z-coordenada, es el plano axial T, cuya traza de perfil T_w pasa (fig. 148, *c*) por el punto O y por el punto, la distancia desde el cual hasta el eje y es igual a 10 unidades, y hasta el eje z, a 17 unidades. El punto S pertenece a este plano. La proyección de perfil s'' del vértice de la pirámide se encuentra en el cruce de $m''n''$ con la traza T_w (en la figura, para simplificar el dibujo, se ha construido la proyección de perfil del punto D perteneciente a la recta MN). Con ayuda de s'' hallamos s' y s. En la fig. 148, *d* vienen dadas las proyecciones de la pirámide buscada.

151. Está dado el triángulo ABC (fig. 149). Construir las proyecciones de la pirámide $SABC$, cuyo vértice S equidista de los vértices de la base ABC y se encuentra en el plano V.

152*. Están dados los puntos A, L, M y N (fig. 150, *a*). Construir el paralelogramo $ABCD$, en el cual el vértice B se encuentra en el plano H, el lado CD, sobre una recta equidistante de los puntos L, M y N, y el vértice D equidista de los planos V y H.

Solución. Puesto que el lado CD del paralelogramo buscado debe encontrarse sobre una recta equidistante de los tres puntos, comenzamos con la construcción de esta recta. Ya nos encontramos con semejante construcción: la recta EF se obtiene como la línea de intersección de dos planos P y Q (fig. 150, *b* y *c*) trazados perpendicularmente a los segmentos LM y MN por sus puntos medios. El punto D en esta recta lo hallamos de la condición de que equidista de los planos V y H (fig. 150, *d*): trazamos por el punto f' la recta auxiliar $f'\ 5$ bajo el mismo ángulo al eje x que la recta $f'e'$, obtenemos sobre la proyección ef el punto d, y con ayuda de éste, d', con la particularidad de que $d'\ 6 = d—6$.

Fig. 149.

Ahora bien, hemos obtenido uno de los vértices del paralelogramo buscado (el punto D) y la dirección del lado que pasa por este punto (la recta EF). Trazando por el punto dado A una recta paralela a EF, obtenemos el lado AB, conociendo que, según los datos del problema, el punto B debe pertenecer al plano H.

Queda terminar la construcción de las proyecciones del paralelogramo, trazando $a'b'$ y ab (fig. 150, *e*), $b'c' \parallel a'd'$ y $bc \parallel ad$. Los puntos c' y c deben estar situados sobre la línea de referencia $c'\ c$ perpendicular al eje x.

Fig. 150a — e.

153. Están dados los puntos A, L, M y N (fig. 151). Construir el paralelogramo $ABCD$, en el cual el vértice B se encuentra en el plano H, el lado CD está situado sobre una recta equidistante de los puntos L, M y N, y el vértice D equidista de los planos V y H.

154. Viene dado el triángulo ABC (fig. 152). Construir las proyecciones de la pirámide $SABC$, cuyo vértice S equidista de los puntos A, B y C y se encuentra a la misma distancia de los planos V y H.

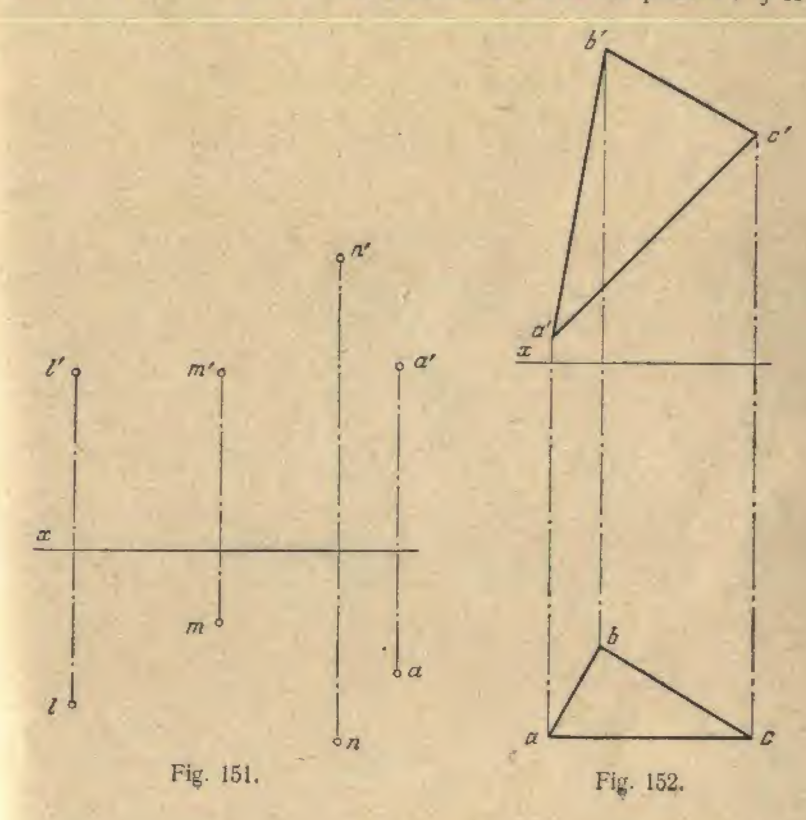


Fig. 151.

Fig. 152.

V

CAPÍTULO

EMPLEO DE LOS MÉTODOS DE TRANSFORMACIÓN DEL DIBUJO

§ 18. DETERMINACIÓN DE LAS DISTANCIAS

155*. Determinar la magnitud verdadera del segmento AB de una recta de posición general (fig. 153, *a*).

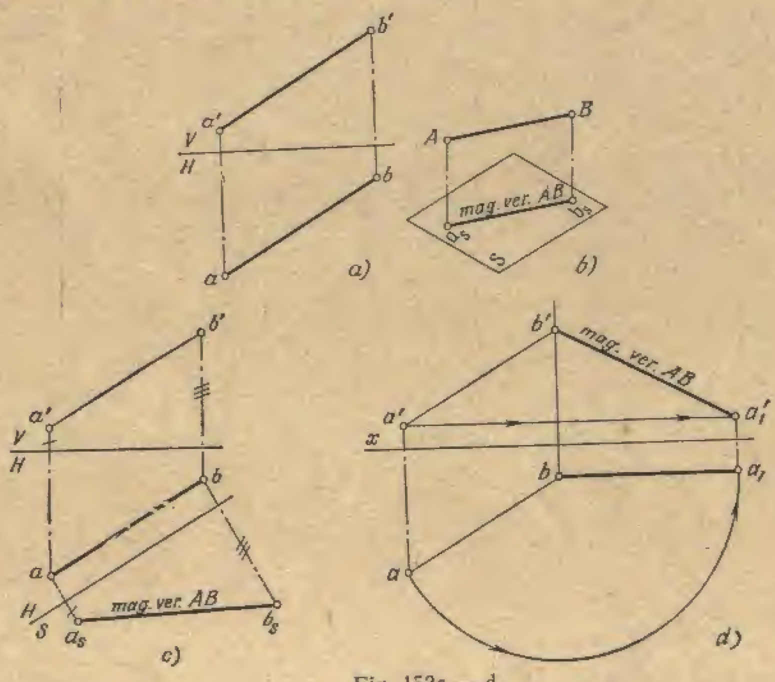


Fig. 153a — d.

Solución. Como es conocido, la proyección de un segmento de recta sobre un plano cualquiera es igual al propio segmento (teniendo en cuenta la escala del dibujo), si el segmento es paralelo al plano (fig. 153, *b*). De esto se desprende, que mediante la transformación del dibujo hay que conseguir que el segmento dado sea

paralelo al plano V o al plano H, o bien añadir al sistema V, H un plano más perpendicular al plano V o al plano H y, al mismo tiempo, paralelo al segmento dado.

En la fig. 153, *c* se muestra la introducción de un plano auxiliar S perpendicular al plano H y paralelo al segmento dado AB.

La proyección $a_s b_s$ es igual a la magnitud verdadera del segmento AB.

En la fig. 153, *d* se muestra otro procedimiento: el segmento AB se ha girado alrededor de una recta, que pasa por el punto B y que es perpendicular al plano H, hasta situarlo paralelamente al plano V. Durante este giro el punto B permanece en su sitio y el punto A ocupa la posición A_1. En la nueva posición la proyección $a_1 b$ es paralela al eje x. La proyección $a_1' b'$ es igual a la magnitud verdadera del segmento AB.

156. Está dada la pirámide $SABCD$ (fig. 154). Determinar la magnitud verdadera de las aristas AS y CS de la pirámide, aplicando el método de cambio de los planos de proyección, y de las aristas BS y DS, empleando el método de giro, tomando el eje de giro perpendicularmente al plano H.

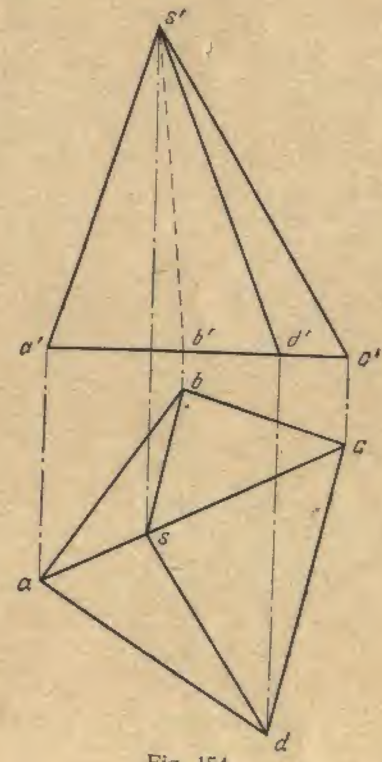


Fig. 154.

157*. Determinar la distancia desde el punto A hasta la recta BC (fig. 155, *a*).

Solución. La distancia de un punto a una recta se mide por el segmento de la perpendicular trazada desde este punto a la recta.

Fig. 155a — e.

Si la recta es perpendicular a un plano cualquiera (fig. 155, *b*), entonces la distancia desde el punto a la recta se mide por la distancia entre la proyección del punto y el punto que representa la proyección de la recta sobre este plano. Si la recta ocupa en el sistema *V*, *H* una posición general, entonces, para determinar

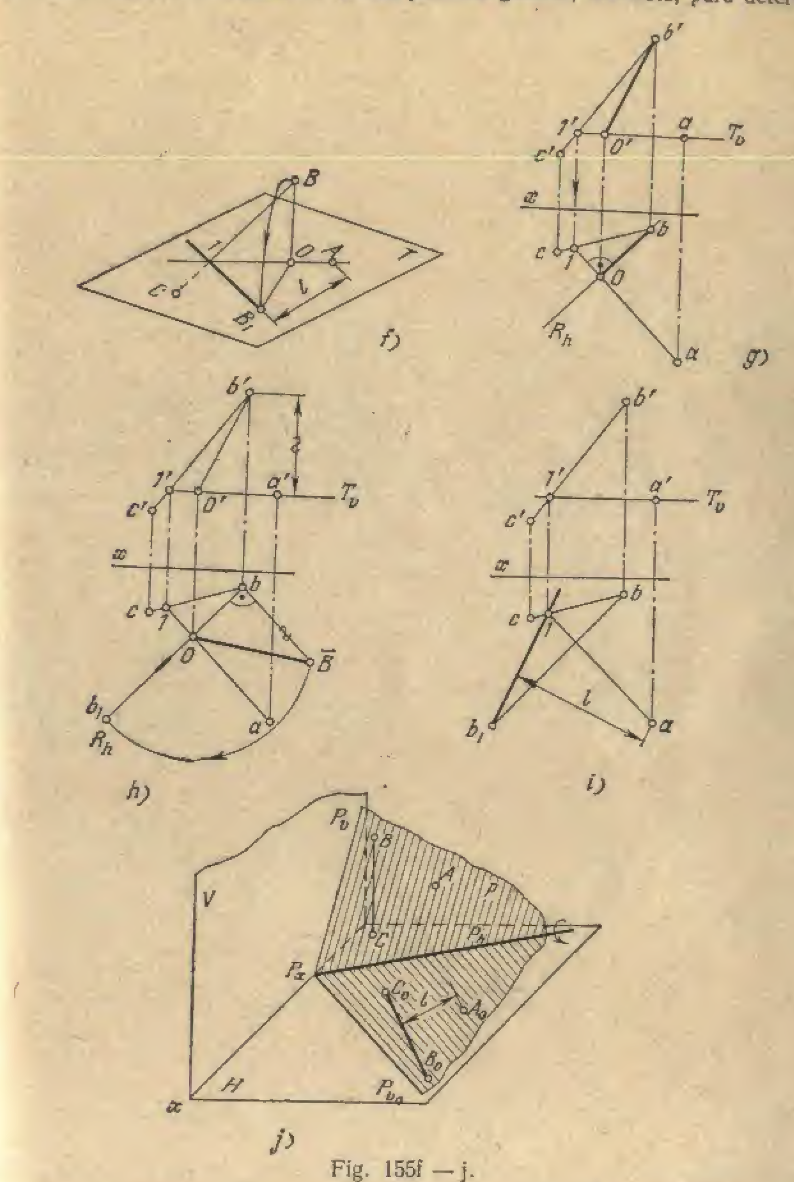


Fig. 155f — j.

la distancia del punto a la recta, empleando el método de cambio de los planos de proyección, hay que introducir en el sistema *V*, *H* dos planos auxiliares más.

Primero (fig. 155, *c*) introducimos el plano *S* paralelo al segmento *BC* (el nuevo eje *S*/*H* es paralelo a la proyección *bc*) y construimos las proyecciones $b_s c_s$

y a_s. Luego (fig. 155, *d*) introducimos el plano *T* perpendicular a la recta *BC* (el
nuevo eje *T/S* es perpendicular a $b_s c_s$). Construimos las proyecciones de la recta
y el punto, a sea, $c_t(b_t)$ y a_t. La distancia entre los puntos a_t y $c_t(b_t)$ es igual a
la distancia *l* desde el punto *A* hasta la recta *BC*.

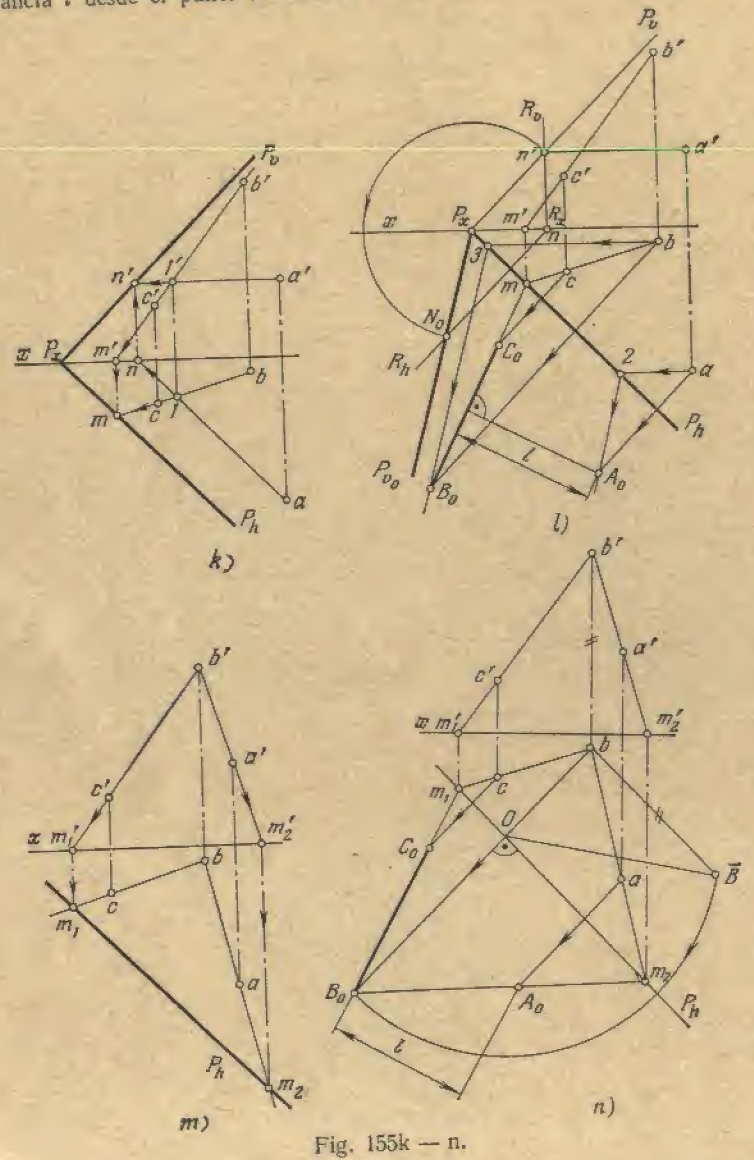


Fig. 155k — n.

En la fig. 155, *e* este mismo problema se ha cumplido con ayuda del método de giro, en la forma llamada método de desplazamiento paralelo. Primeramente giramos la recta *BC* y el punto *A*, conservando invariable su posición mutua, alrededor de cierta recta (que no se muestra en el dibujo) perpendicular al plano *H*,

de tal modo que la recta *BC* quede situada paralelamente al plano *V*. Esto es equivalente al desplazamiento de los puntos *A*, *B* y *C* en planos paralelos al plano *H*. En este caso, la proyección horizontal del sistema dado ($BC+A$) no varía ni por su magnitud ni por su configuración, varía solamente su posición respecto del eje *x*. Colocamos la proyección horizontal de la recta *BC* paralelamente al eje *x* (la posición b_1c_1) y determinamos la proyección a_1, trazamos $c_1 1_1 = c-1$ y $a_1 1_1 = a-1$, además, $a_1 1_1 \perp c_1 1_1$. Trazando las rectas $b'b_1'$, $a'a_1'$ y $c'c_1'$ paralelamente al eje *x*, hallamos sobre ellas las proyecciones frontales b_1', a_1' y c_1'. Luego desplazamos los puntos B_1, C_1 y A_1 en planos paralelos al plano *V* (también sin variar su posición mutua), de tal modo que B_2C_2 sea perpendicular al plano *H*. En este caso, la proyección frontal de la recta se situará perpendicularmente al eje *x*, $b_2'c_2' = b_1'c_1'$, y para la construcción de la proyección a_2' hay que tomar $b_2'2_2' = b_1'2_1'$, trazar $2_2'a_2' \perp b_2'c_2'$ y $a_2'2_2' = a_1'2_1'$. Ahora, trazando c_1c_2 y $a_1a_2 \| x$, obtenemos las proyecciones b_2c_2 y a_2 y la distancia buscada *l* del punto *A* a la recta *BC*. La distancia de *A* a *BC* se puede determinar girando el plano determinado por el punto *A* y la recta *BC* alrededor de la horizontal de este plano hasta la posición $T \| H$ (fig. 155, *f*).

En el plano, dado por el punto *A* y la recta *BC*, trazamos la horizontal $A-1$ (fig. 155, *g*) y giramos alrededor de ésta el punto *B*. El punto *B* se desplaza en el plano *R* (dado en el dibujo por su traza R_h) perpendicular a $A-1$; en el punto *O* se encuentra el centro de giro del punto *B*. Determinamos ahora la magnitud verdadera del radio de giro *BO* (fig. 155, *h*). En la posición requerida, o sea, cuando el plano *T*, determinado por el punto *A* y la recta *BC*, es parelelo al plano *H*, el punto *B* se obtiene sobre la traza R_h, a la distancia Ob_1 del punto *O* (puede obtenerse también otra posición sobre la misma traza R_h, pero al otro lado del punto *O*). El punto b_1 es la proyección horizontal del punto *B* después de desplazarlo a la posición B_1 en el espacio, cuando el plano, determinado por el punto *A* y la recta *BC*, ocupó la posición *T*.

Trazando (fig. 155, *i*) la recta $b_1 1$, obtenemos la proyección horizontal de la recta *BC* dispuesta ya paralelamente al plano *H* en el mismo plano que el punto *A*. En esta posición, la distancia de *a* a $b_1 1$ es igual a la distancia buscada *l*. El plano *P*, en el que se encuentran los elementos dados, puede ser abatido con el plano *H* (fig. 155, *j*), girando el plano *P* alrededor de su traza horizontal. Pasando de la expresión del plano por el punto *A* y la recta *BC* a la expresión por las rectas *BC* y $A-1$ (fig. 155, *k*), hallamos las trazas de estas rectas y trazamos por ellas las trazas P_v y P_h. Construimos (fig. 155, *l*) la posición abatida sobre el plano *H* de la traza frontal (P_{vo}).

Trazamos por el punto *a* la proyección horizontal de la frontal; la frontal abatida pasa por el punto *2* de la traza P_h, paralelamente a P_{vo}. El punto A_0 es la posición abatida del punto *A* en el plano *H*. Análogamente hallamos el punto B_0. En la posición abatida sobre el plano *H*, la recta *BC* pasa por el punto B_0 y el punto *m* (la traza horizontal de la recta).

La distancia desde el punto A_0 hasta la recta B_0C_0 es igual a la distancia buscada *l*.

La construcción indicada puede efectuarse hallando sólo la traza P_h (fig. 155, *m* y *n*). Todas las construcciones son análogas al giro alrededor de la horizontal (véase la fig. 155, *g*, *h*, *i*): la traza P_h es una de las horizontales del plano *P*.

De todos los métodos de transformación del dibujo expuestos para la resolución de este problema el más preferible es el método de giro alrededor de la horizontal o la frontal.

158. Viene dada la pirámide *SABC* (fig. 156). Determinar las distancias:

a) desde el vértice *B* de la base hasta su lado *AC* por el método de desplazamiento paralelo;

b) desde el vértice *S* de la pirámide hasta los lados *BC* y *AB* de la base, valiéndose del método de giro alrededor de la horizontal;

c) desde el vértice *S* hasta el lado *AC* de la base, auxiliándose del método de cambio de los planos de proyección.

159. Está dado un prisma (fig. 157). Determinar las distancias:
a) entre las aristas AD y CF con ayuda del método de cambio de los planos de proyección;

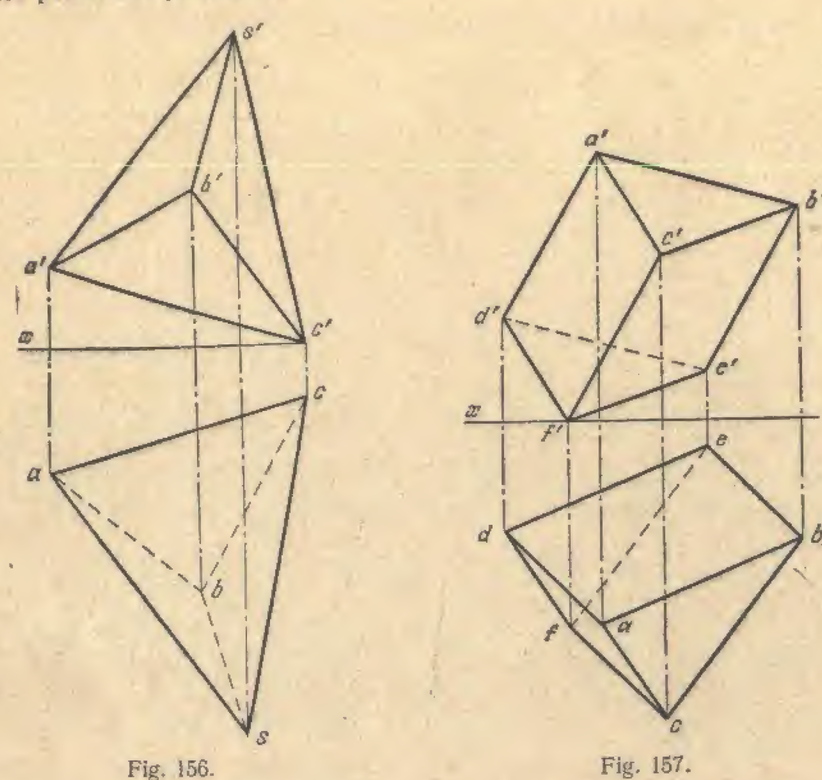


Fig. 156. Fig. 157.

b) entre las aristas BE y CF, valiéndose del método de giro alrededor de la frontal;

c) entre las aristas AD y BE, auxiliándose del método de desplazamiento paralelo.

160. Determinar la magnitud verdadera del cuadrilátero $ABCD$ (fig. 158) abatiéndolo sobre el plano H. Valerse sólo de la traza horizontal del plano.

√ **161***. Determinar la distancia entre las rectas que se cruzan AB y CD (fig. 159, a) y construir las proyecciones de la perpendicular común a estas rectas.

Solución. La distanaia entre rectas que se cruzan se mide por el segmento (MN) de la perpendicular a ambas rectas (fig. 159, b). Obviamente, si se dispone una de las rectas perpendicularmente a un plano cualquiera T, entonces el segmento MN de la perpendicular común a ambas rectas será paralelo al plano T, y su proyección sobre este plano representará la distancia buscada. La proyección del ángulo recto, formado por MN y AB, sobre el plano T, también será un ángulo recto entre m_tn_t

y a_tb_t, puesto que uno de los lados del ángulo recto AMN, precisamente el lado MN, es paralelo al plano T.

En la fig. 159, c y d, la distancia buscada l se ha determinado con ayuda del método de cambio de los planos de proyección. Primero introducimos el plano auxiliar de proyección S perpendicular al plano H y paralelo a la recta CD (fig. 159, c). Luego introducimos un plano auxiliar más T perpendicular al plano S y

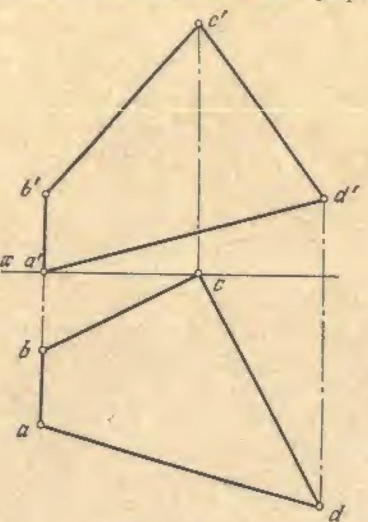


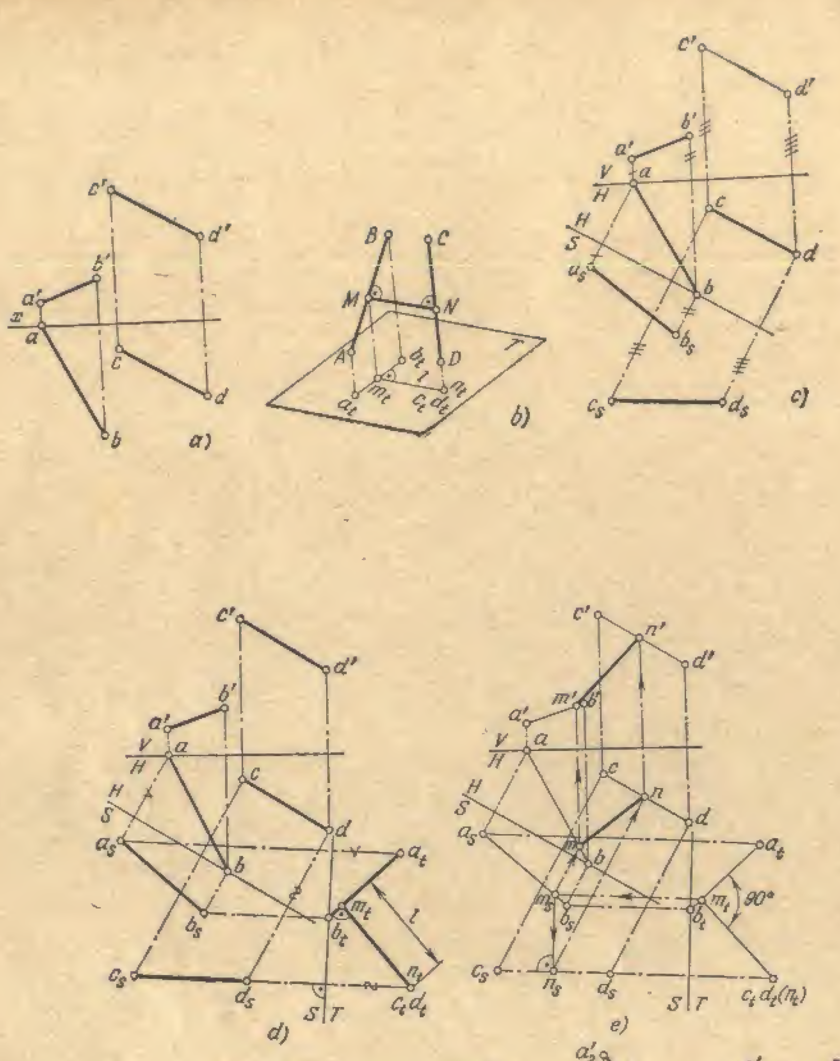
Fig. 158.

perpendicular a la misma recta CD (fig. 159, d). Ahora se puede construir la proyección de la perpendicular común m_tn_t, trazando m_tn_t, a partir del punto $c_t(d_t)$, perpendicularmente a la proyección a_tb_t. Los puntos m_t y n_t son las proyecciones de los puntos de intersección de esta perpendicular con las rectas AB y CD. Con ayuda del punto m_t (fig. 159, e) hallamos m_s sobre a_sb_s: la proyección m_sn_s deberá ser paralela al eje T/S. A continuación, con auxilio de m_s y n_s hallamos m y n sobre ab y cd, y valiéndonos de estos puntos hallamos m' y n' sobre $a'b'$ y $c'd'$.

En la fig. 159, f se muestra la resolución de este problema haciendo uso del método de desplazamiento paralelo. Primero colocamos la recta CD paralelamente al plano V: la proyección $c_1d_1 \| x$. Luego desplazamos las rectas CD y AB de las posiciones C_1D_1 y A_1B_1 a las posiciones C_2D_2 y A_2B_2 de tal modo que C_2D_2 se sitúe perpendicularmente al plano H: la proyección $c_2'd_2' \perp x$. El segmento de la perpendicular buscada se sitúa paralelamente al plano H y, por consiguiente, m_2n_2 expresa la distancia buscada l entre AB y CD. Hallamos la posición de las proyecciones m_2' y n_2' sobre $a_2'b_2'$ y $c_2'd_2'$, luego de las proyecciones m_1, m_1', n_1 y n_1' y, finalmente, de las proyecciones m', n_1', m y n.

162. Está dada la pirámide $SABC$ (fig. 160). Determinar la distancia entre la arista SB y el lado AC de la base de la pirámide y construir las proyecciones de la perpendicular común a SB y AC, valiéndose del método de cambio de los planos de proyección.

163. Está dada la pirámide $SABC$ (fig. 161). Determinar la distancia entre la arista SA y el lado BC de la base de la pirámide y construir las proyecciones de la perpendicular común a SA y BC, auxiliándose del método de desplazamiento paralelo.



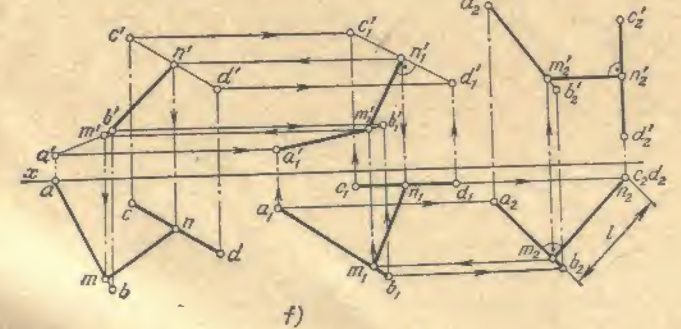


Fig. 159a — f.

164 *. Determinar la distancia desde el punto A hasta un plano, en los casos en que el plano viene dado: a) por el triángulo BCD (fig. 162, *a*); b) por sus trazas (fig. 162, *b*).

Solución. Como es sabido, la distancia desde un punto hasta un plano se mide por la magnitud de la perpendicular levantada en este punto al plano. Esta distancia se proyecta sobre un plano cualquiera de proyección en tamaño natural, si el plano dado es perpendicular al plano de proyección (fig. 162, *c*). Se puede conseguir esta

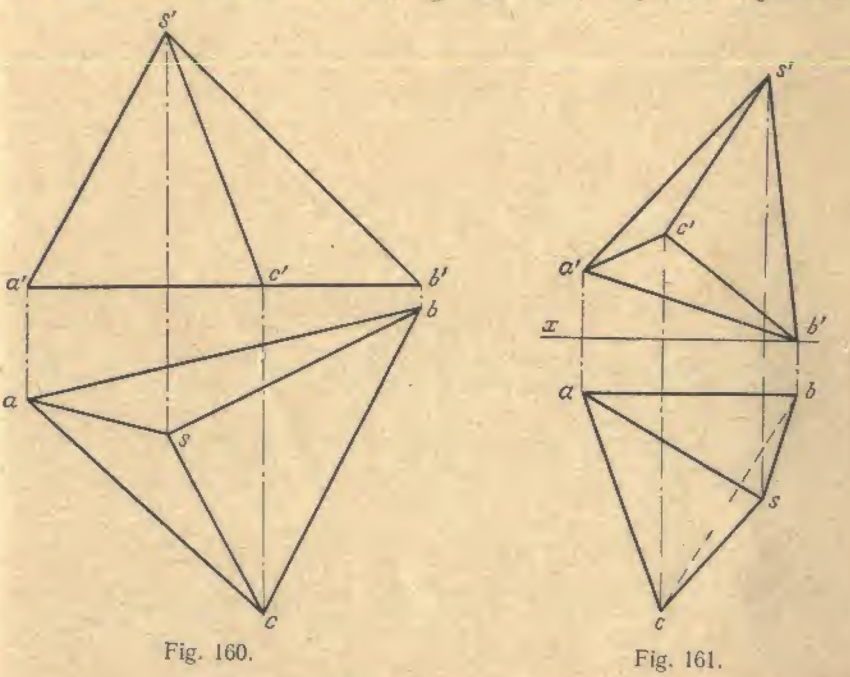


Fig. 160. Fig. 161.

posición transformando el dibujo, por ejemplo, por el método de cambio de los planos de proyección. Introduzcamos el plano S (fig. 162, *d*) perpendicular al plano del triángulo BCD. Para ello trazamos en el plano del triángulo la horizontal $B—1$ y colocamos el eje de proyección S perpendicularmente a la proyección $b—1$ de la horizontal. Construimos las proyecciones del punto y el plano (a_s y el segmento c_sd_s). La distancia de a_s a c_sd_s es igual a la distancia buscada l del punto al plano.

En la fig. 162, *e* se ha empleado el método de desplazamiento paralelo. Desplazamos todo el sistema hasta que la horizontal $B—1$ del plano se sitúe perpendicularmente al plano V: la proyección $b_1 l_1$ deberá ser perpendicular al eje x. En esta posición, el plano del triángulo se convierte en un plano proyectante frontal, y la distancia l desde el punto A hasta este plano se obtiene en el plano V en verdadera magnitud.

En la fig. 162, *b* el plano viene dado por sus trazas. Introducimos (fig. 162, *f*) el plano auxiliar S perpendicular al plano P: el eje S/H es perpendicular a la traza P_h. Lo demás está claro del dibujo. En la fig. 162, *g* este problema se ha resuelto con ayuda de un desplazamiento: el plano P pasa a la posición P_1, es decir, se convierte en un plano proyectante frontal. La traza P_{1h} es perpendicular al eje x. Construimos en esta posición del plano la traza frontal de la horizontal (el punto n_1', n_1). La traza P_{1v} pasará por P_{1x} y n_1'. La distancia de a_1' a P_{1v} es igual a la distancia buscada l.

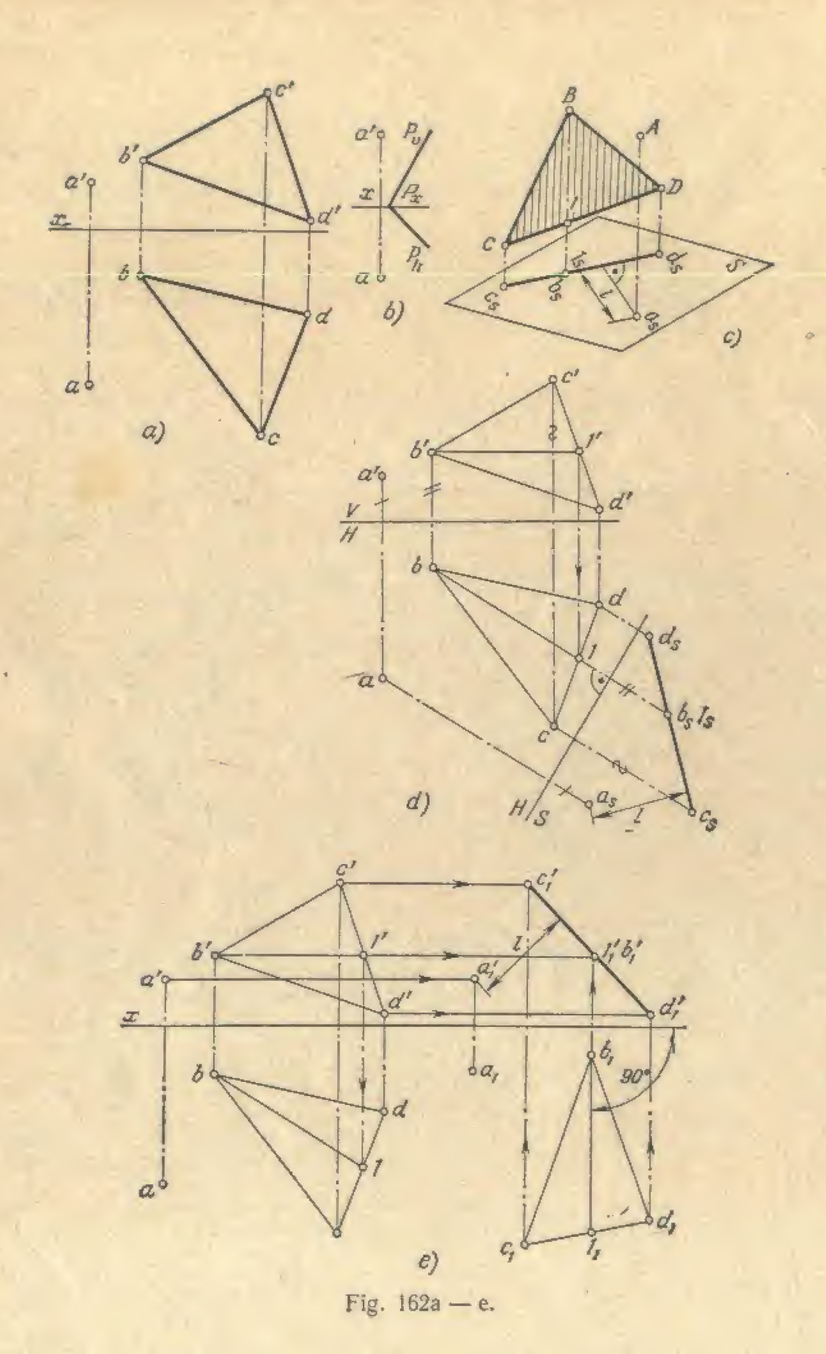


Fig. 162a — e.

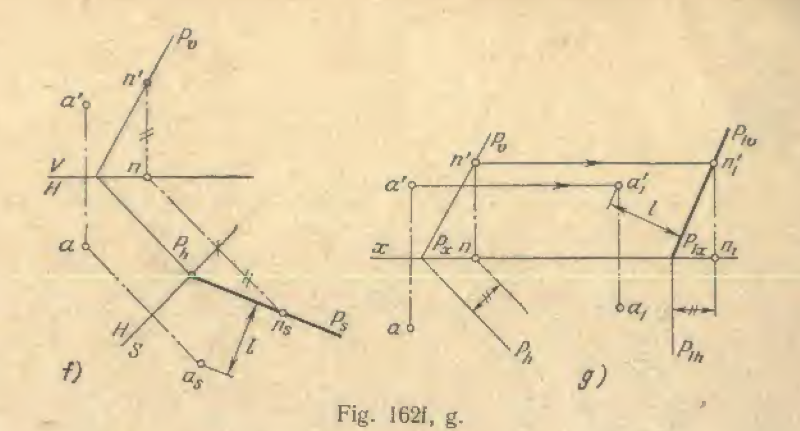


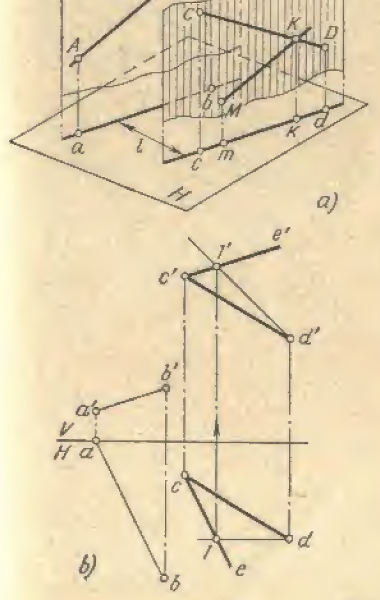
Fig. 162f, g.

165. Está dada la pirámide $SABC$ (véase la fig. 160). Determinar la distancia desde el punto A hasta la cara SBC de la pirámide, empleando el método de desplazamiento paralelo.

166. Está dada la pirámide $SABC$ (véase la fig. 161). Determinar la altura de la pirámide, aplicando el método de desplazamiento paralelo.

167*. Determinar la distancia entre las rectas que se cruzan AB y CD (véase la fig. 159, a) como la distancia entre planos paralelos trazados por estas rectas.

Solución. En la fig. 163, a se muestran los planos P y Q paralelos entre sí; el plano Q ha sido trazado por CD paralelamente a AB, y el plano P, por AB para-



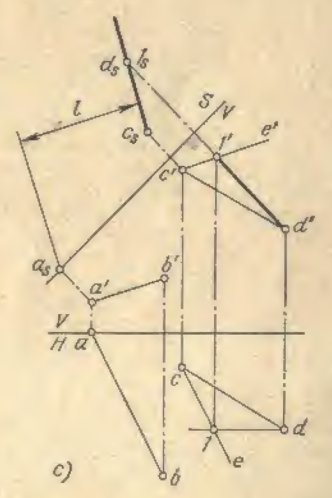


Fig. 163a — c.

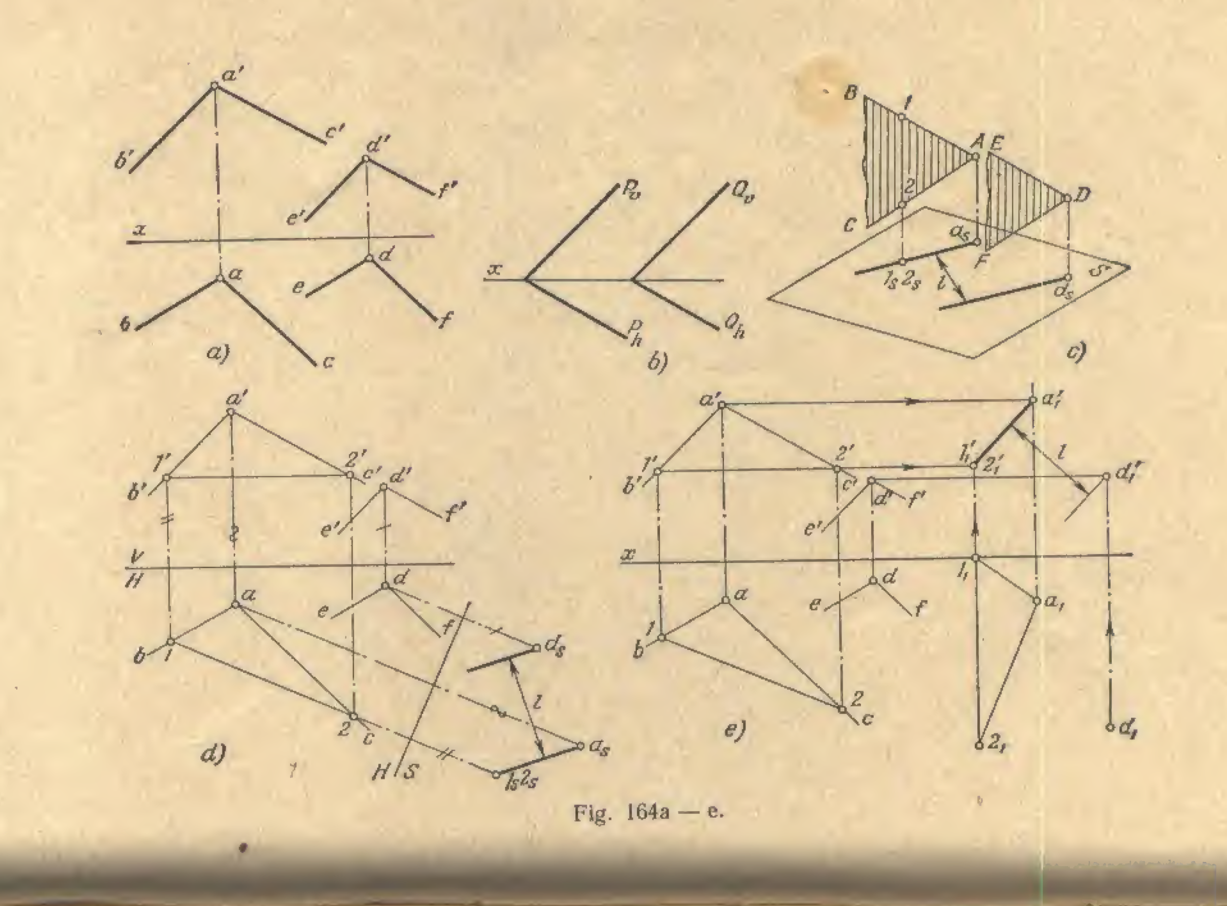


Fig. 164a — e.

Fig. 164f, g.

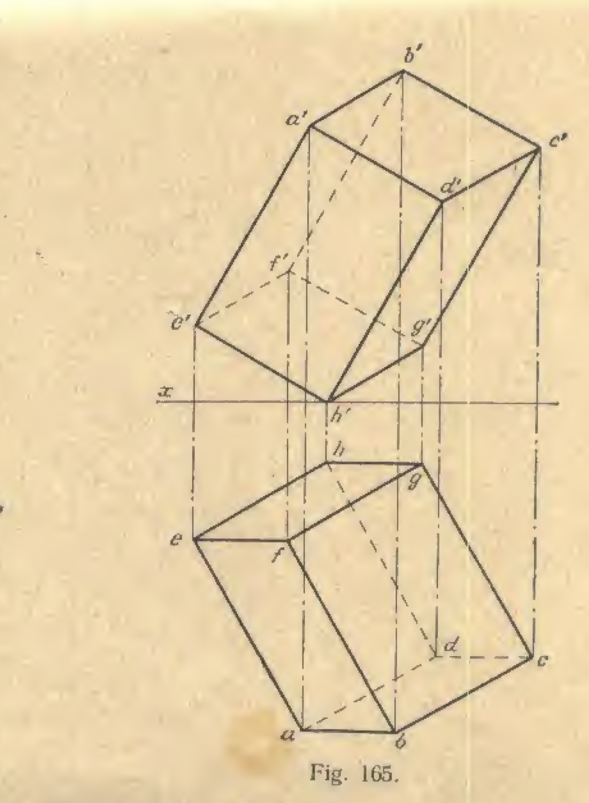


Fig. 165.

lelamente al plano Q. La distancia entre tales planos se considera, precisamente, como distancia entre las rectas que se cruzan AB y CD. No obstante, podemos limitarnos a la construcción de un solo plano, por ejemplo, el Q, paralelamente a AB, y luego determinar la distancia de aunque sea el punto A hasta este plano.

En la fig. 163, *b* viene dado el plano Q trazado por CD paralelamente a AB; en las proyecciones se ha trazado $c'e' \| a'b'$ y $ce \| ab$. Empleado el método de cambio de los planos de proyección (fig. 163, *c*) introducimos un plano auxiliar S, perpendicular al plano V y, al mismo tiempo, perpendicular al plano Q. Para trazar el eje S/V tomamos en este plano la frontal $D-1$. Ahora trazamos S/V perpendicularmente a $d'1'$ (fig. 163, *c*). El plano Q se representa en el plano S en forma de la recta $c_s d_s$. Lo demás está claro del dibujo.

168. Está dada la pirámide $SABC$ (véase la fig. 160). Determinar la distancia entre las aristas SC y AB. Emplear: 1) el método de cambio de los planos de proyección, 2) el método de desplazamiento paralelo.✓

169*. Determinar la distancia entre dos planos paralelos, uno de los cuales está dado por las rectas AB y AC, y el otro, por las rectas DE y DF (fig. 164, *a*). Efectuar también la construcción para el caso cuando los planos están dados por sus trazas (fig. 164, *b*).

Solución. La distancia (fig. 164, *c*) entre los planos paralelos puede ser determinada trazando la perpendicular desde un punto cualquiera de uno de los planos al otro plano. En la fig. 164, *d* se ha introducido un plano auxiliar S perpendicular al plano H y a ambos planos dados. El eje S/H es perpendicular a la proyección horizontal de la horizontal trazada en uno de los planos. Construimos la proyección de este plano y del punto D del otro plano sobre el plano S. La distancia desde el punto d_s hasta la recta $1_s a_s$ es igual a la distancia buscada entre los planos paralelos.

En la fig. 164, *e* se da otra construcción (por el método de desplazamiento paralelo). Para que el plano, expresado por las rectas que se cortan AB y AC, sea perpendicular al plano V, colocamos la proyección horizontal de la horizontal de este plano perpendicularmente al eje x: $1_1 2_1 \perp x$. La distancia entre la proyección frontal d_1' del punto D y la recta $a_1' 2_1'$ (la proyección frontal del plano) es igual a la distancia buscada entre los planos.

En la fig. 164, *f* se muestra la introducción del plano auxiliar S perpendicular al plano H y a los planos dados P y Q (el eje S/H es perpendicular a las trazas P_h y Q_h). Construimos las trazas P_s y Q_s. La distancia entre estas trazas (véase la fig. 164, *c*) es igual a la distancia buscada l entre los planos P y Q.

En la fig. 164, *g* se muestra el desplazamiento de los planos P y Q a la posición P_1 y Q_1, en la que las trazas horizontales son perpendiculares al eje x. La distancia entre las nuevas trazas frontales P_{1v} y Q_{1v} es igual a la distancia buscada l.

170. Está dado el paralelepípedo $ABCDEFGH$ (fig. 165). Determinar las distancias: a) entre las bases del paralelepípedo (l_1); b) entre las caras $ABFE$ y $DCGH$ (l_2); c) entre las caras $ADHE$ y $BCGF$ (l_3).

§ 19. DETERMINACIÓN DE LA MAGNITUD DE LOS ÁNGULOS

171*. Determinar los ángulos de inclinación de la recta AB a los planos V y H (fig. 166, *a*).

Solución. Si la recta es paralela al plano V (fig. 166, *b*), entonces, el ángulo formado por esta recta con el plano H (el ángulo α) se representa en la proyección frontal en verdadera magnitud. Si la recta es paralela al plano H (fig. 166, *c*), entonces, el ángulo formado por esta recta con el plano V (el ángulo β) se representa en

la proyección horizontal en verdadera magnitud. Por eso, colocando la recta de posición general dada, primero, paralelamente al plano V y, luego, paralelamente al plano H, se puede determinar respectivamente los ángulos α y β.

En la fig. 166, *d* se muestra el empleo del método de cambio de los planos de proyección para determinar los ángulos α y β. Así, para determinar el ángulo α

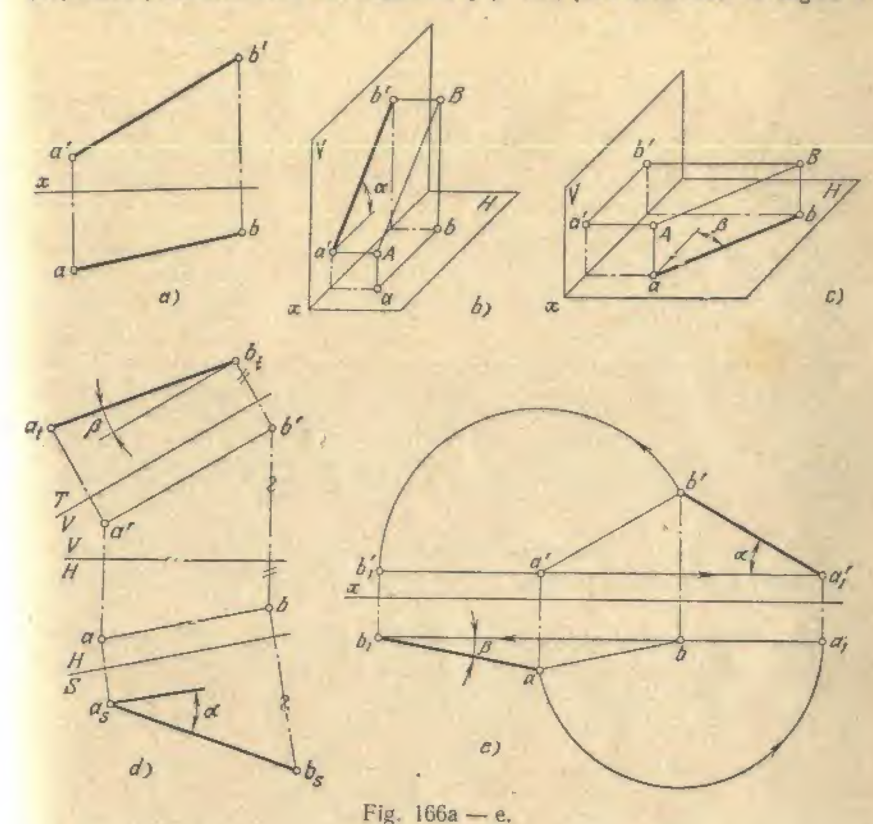


Fig. 166a — e.

se ha introducido el plano auxiliar S perpendicular al plano H y paralelo a AB, y para determinar el ángulo β, el plano auxiliar $T \perp V$ y, al mismo tiempo, paralelo a AB.

En la fig. 166, *e*, la recta viene dada como si hubiera sido girada: a) alrededor del eje que pasa por el punto B y que es perpendicular al plano H, hasta colocarla paralelamente al plano V (la posición $a_1'b'$, a_1b): se ha determinado el ángulo α; b) alrededor del eje que pasa por el punto A perpendicularmente al plano V hasta conseguir el paralelismo con el plano H (la posición $a'b_1'$, ab_1): se ha determinado el ángulo β.

Claro que se pueden representar estos ejes en el dibujo, pero, como se puede apreciar, la construcción es posible sin necesidad de esto.

172. Está dada la pirámide $SABCD$ (véase la fig. 154). Determinar los ángulos de inclinación de las aristas de la pirámide a los planos V y H.

173*. Determinar los ángulos de inclinación del plano dado por el triángulo *ABC* (fig. 167, *a*) a los planos *H* y *V*.

Solución. Como es conocido, el ángulo de inclinación (α) de un plano al plano *H* se proyecta sobre el plano *V* en magnitud verdadera, si el plano es perpendicular al plano *V* (fig. 167, *b*), y el ángulo de inclinación (β) del plano al plano *V* se proyecta sobre el plano *H* en verdadera magnitud, si el plano es perpendicular al plano *H* (fig. 167, *c*).

En la fig. 167, *d*, para determinar el ángulo α pasamos al sistema *S*, *H*, donde el plano *S* es perpendicular al plano *H* y al plano dado (el eje *S/H* es perpendicular a la proyección horizontal *a—1* de la horizontal).

La determinación del ángulo β se ha efectuado mediante el paso del sistema *V*, *H* al sistema *T*, *V*, donde plano *T* es perpendicular al plano *V* y al plano dado del triángulo (el eje *T/V* es perpendicular a la proyección frontal *c'2'* de la frontal).

En la fig. 167, *e* el mismo problema se ha resuelto con ayuda del método de desplazamiento paralelo. Primeramente todos los vértices del triángulo dado *ABC* se han desplazado en planos paralelos al plano *H* de tal modo que el plano del triángulo sea perpendicular al plano *V*. Esto se ha conseguido con auxilio de la horizontal *A—1*, desplazada de tal manera que se haya situado perpendicularmente al plano *V* (la proyección horizontal $a_1 1_1$ es perpendicular al eje *x*). Obtenemos el ángulo α, formado por el plano del triángulo con el plano *H*, en verdadera magnitud.

Para determinar el ángulo β, formado por el plano del triángulo *ABC* con el plano *V*, el triángulo ha sido girado de tal modo que se sitúe perpendicularmente al plano *H*. Esto se ha realizado con ayuda de la frontal *C—2*: ésta se ha colocado perpendicularmente al plano *H* (la posición $C_2 2_2$, la proyección $c_2' 2_2' \perp x$) y, por consiguiente, el plano que pasa por esta frontal también es perpendicular al plano *H*.

174. Viene dada la pirámide *SABC* (véase la fig. 161). Determinar los ángulos formados por las caras *SAB*, *SAC* y *ABC* con los planos *H* y *V*.

175. Está dado un paralelepípedo (véase la fig. 165). Determinar los ángulos formados por la base *ABCD* y la cara *CDHG* con el plano *V* y por la cara *ADEH* con el plano *H*.

176*. Determinar la magnitud del ángulo *BAC* (fig. 168, *a*).

Solución. Si el plano de un ángulo es paralelo a cualquier plano de proyección, entonces el ángulo se proyecta sobre este plano en verdadera magnitud (fig. 168, *b*).

En la fig. 168, *c* el problema se ha resuelto con ayuda del método de cambio de los planos de proyección. Puesto que el plano del ángulo *BAC* es un plano de posición general (su horizontal no es perpendicular a ninguno de los planos *V*, *H* y *W*), es necesario añadir, primero, al sistema *V*, *H* el plano *S*, tomándolo perpendicular al plano *H* y al plano del ángulo *BAC*. Como resultado de esta transformación la proyección del ángulo sobre el plano *S* se obtiene en forma del segmento $a_s 1_s$. Ahora se puede introducir otro plano auxiliar de proyección (*T*), trazándolo perpendicularmente al plano *S* y, al mismo tiempo, paralelamente al plano del ángulo *BAC*. El ángulo $1_t\ a_t\ 2_t$ representará la magnitud verdadera del ángulo *BAC*.

En la fig. 168, *d* el ángulo buscado φ se ha determinado por el método de desplazamiento paralelo.

Primeramente se ha desplazado el plano del ángulo de modo tal, que se ha situado perpendicularmente al plano *V* (para ello colocamos la proyección horizontal de la horizontal perpendicularmente al eje *x*). Luego colocamos el plano del ángulo paralelamente al plano *H*, para lo cual trasladamos la proyección $1_1' a_1'$ a la posición $1_2' a_2'$ (es decir, paralelamente al eje *x*). En la fig. 168, *e* se muestra una construcción más. Aquí, para la determinación de la magnitud del ángulo se ha empleado el giro alrededor de la horizontal: el plano del ángulo se situará paralelamente al plano *H* (la posición *T*).

Las construcciones se han cumplido en el orden siguiente:

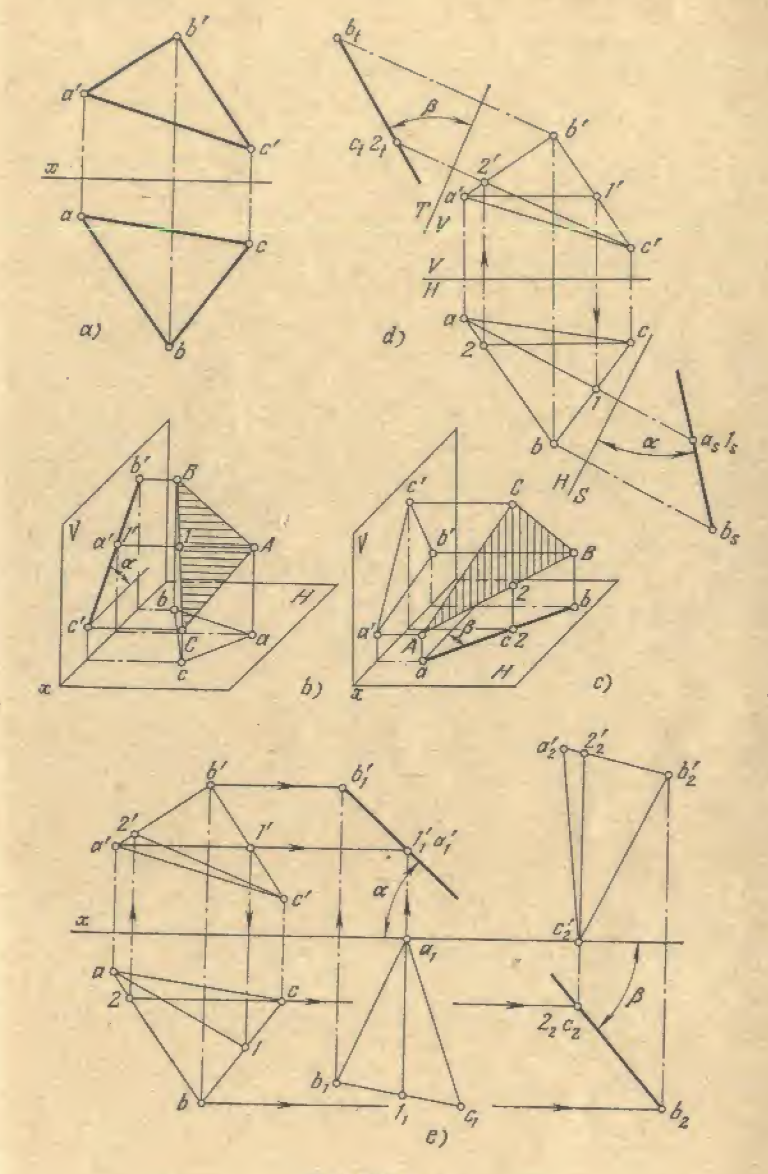


Fig. 167a — e.

Fig. 168a — e.

1. Se ha trazado el plano de giro del punto A: el plano proyectante horizontal R perpendicular a la horizontal (es decir, al eje de giro).

2. Se ha marcado el centro de giro del punto A en la intersección de la horizontal con el plano R (el punto O, O') y se han señalado las proyecciones del radio de giro (Oa y $O'a'$).

3. Se ha determinado la magnitud verdadera del radio de giro (ésta viene expresada por la hipotenusa $O\bar{A}$ del triángulo $Oa\bar{A}$).

4. Se ha trazado el arco de circunferencia de radio $O\bar{A}$ y se ha hallado el punto a_1 sobre la traza R_h, punto que es la proyección horizontal del vértice del ángulo después de su giro alrededor de la horizontal hasta ser abatido sobre el plano T, y se ha construido el ángulo $1a_12$ igual al buscado.

Para la resolución de problemas del tipo 176 lo más racional es el empleo del giro alrededor de la horizontal (o frontal), como se muestra en la fig. 168, *e*.

177. Está dada la pirámide $SABC$ (véase la fig. 156). Determinar, por el método de giro alrededor de la horizontal, el ángulo entre las aristas SA y SB, SB y SC, SC y SA.

178. Viene dado un paralelepípedo (véase la fig. 165). Determinar los ángulos entre las aristas DH y CD, CG y CD, AB y BC.

179*. Determinar la magnitud del ángulo entre las rectas que se cruzan AB y CD (fig. 169, *a*).

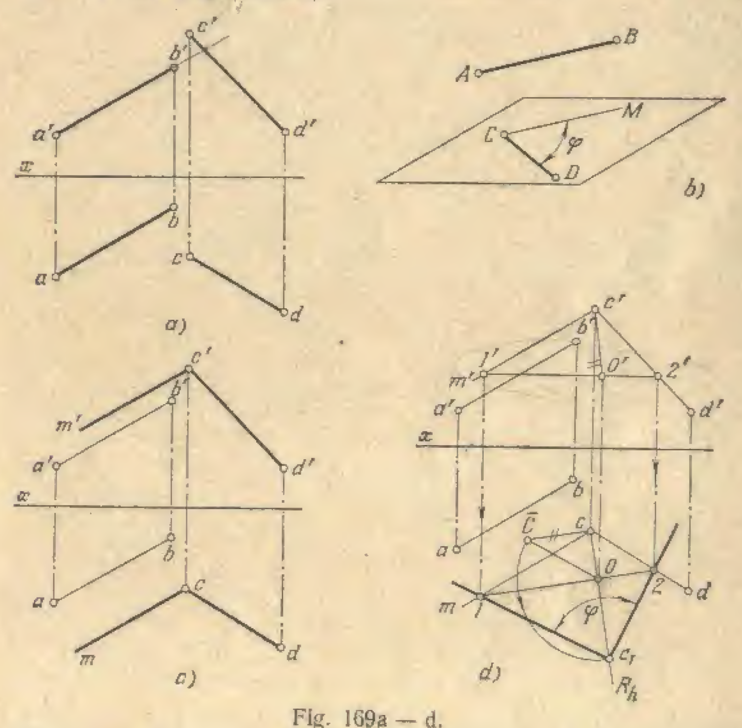


Fig. 169a — d.

Solución. El ángulo entre dos rectas que se cruzan se determina por el ángulo formado por rectas que se cortan, paralelas respectivamente a las rectas que se cruzan dadas. Para determinar la magnitud del ángulo hay que comenzar con su representación en el dibujo. Esto se ha hecho en la fig. 169, *b*, con la particularidad de que

se ha empleado una de las rectas dadas (la CD), por cuyo punto C se ha trazado la recta CM paralela a la otra recta dada (la AB). La magnitud del ángulo MCD (fig. 169, *c*) expresa el ángulo entre las rectas AB y CD. Esto se ha efectuado con ayuda del giro alrededor de la horizontal *1—2* (fig. 169, *d*), tomada en el plano del ángulo MCD.

180. Está dada la pirámide $SABC$ (véase la fig. 160). Determinar la magnitud del ángulo entre sus aristas: a) SB y AC, b) SA y BC.

181*. Determinar la magnitud del ángulo φ formado por la recta AB con el plano dado por el triángulo CDE (fig. 170, *a*).

Solución. Como es sabido, se llama ángulo entre una recta (AB) y un plano (P) el ángulo agudo (φ) entre la recta y su proyección (a_pK) sobre este plano. Para construir este ángulo (fig. 170, *b*) hay que hallar los puntos de intersección de la recta AB y la perpendicular, levantada en un punto cualquiera de la recta AB al plano P, con el plano P. Pero si, como en este problema, hay que determinar sólo

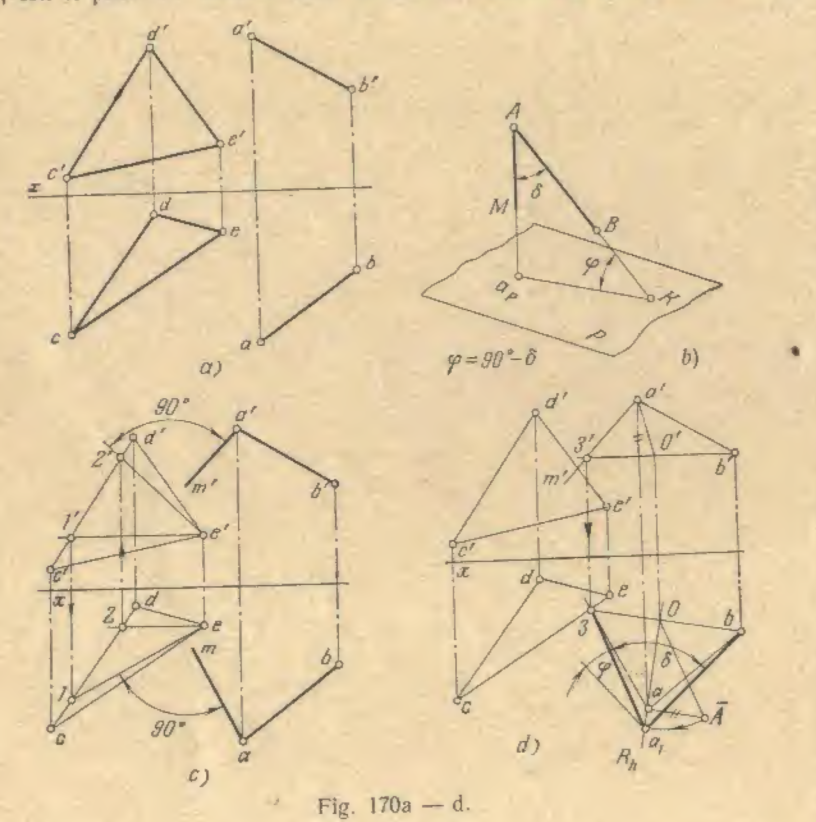


Fig. 170a — d.

la magnitud del ángulo formado por la recta con el plano, es más fácil determinar la magnitud del ángulo δ complementario al ángulo φ; hallando el ángulo δ se puede determinar la magnitud del ángulo φ de la relación $\varphi=90°-\delta$. En la fig. 170, *c* se muestra la construcción de las proyecciones am y $a'm'$ de la perpendicular al plano del triángulo CDE, para lo cual se han tomado la horizontal y la frontal de este plano: $am \perp e-1$, $a'm' \perp e'2'$.

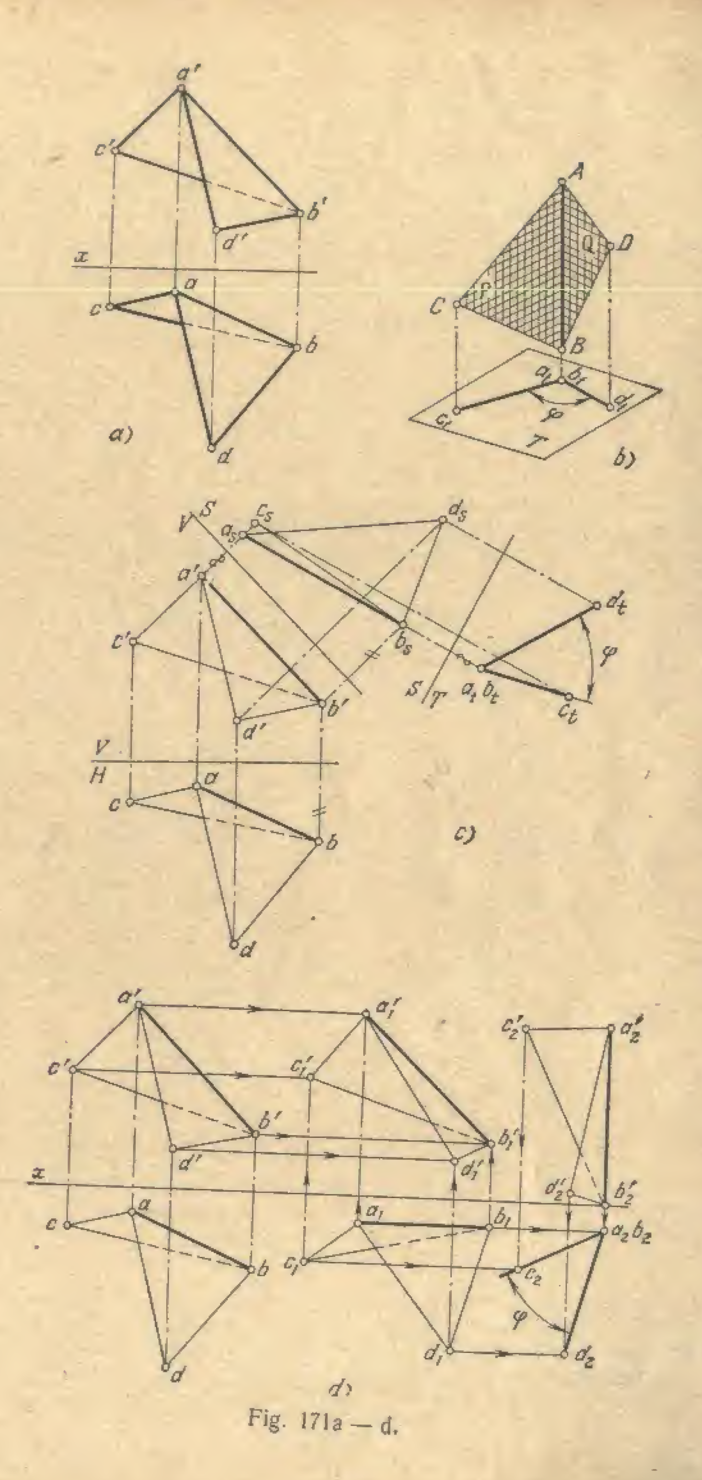


Fig. 171a — d.

Ahora se puede determinar (fig. 170, *d*) la magnitud verdadera del ángulo δ con el vértice A, cosa que se ha hecho con el giro alrededor de la horizontal $b'3'$, b—3. El ángulo buscado $\varphi=90°-\delta$.

182. Está dada la pirámide $SABC$ (véase la fig. 161). Determinar los ángulos que forman las aristas SA, SB y SC con la cara ABC.

183*. Determinar el ángulo entre las caras ABC y ABD (fig. 171, *a*).

Solución. El ángulo diedro se mide por el ángulo lineal obtenido en la intersección de las caras del ángulo diedro con el plano perpendicular a ambas caras del diedro, y, por consiguiente, también a la línea de su intersección, es decir, a la arista del ángulo diedro. Si esta arista AB es perpendicular a un plano cualquiera T (fig. 171, *b*), entonces, la proyección del ángulo diedro obtenida sobre el plano T expresa su ángulo lineal.

Para resolver el problema (fig. 171, *c*) se ha empleado el método de cambio de los planos de proyección. Se ha pasado del sistema V, H al sistema S, V, donde $S\perp V$ y $S \parallel AB$, y luego de este sistema S, V se ha pasado al sistema T, S, donde $T\perp S$ y $T\perp AB$.

El triángulo se proyecta sobre el plano T en forma de los segmentos a_tc_t y a_td_t. El ángulo entre ellos es igual al ángulo buscado φ.

En la fig. 171, *d* se muestra la resolución del mismo problema con auxilio del método de desplazamiento paralelo: la arista AB se ha colocado perpendicularmente al plano H.

184*. Determinar la magnitud del ángulo formado por el plano P con el plano del triángulo ABC (fig. 172, *a*).

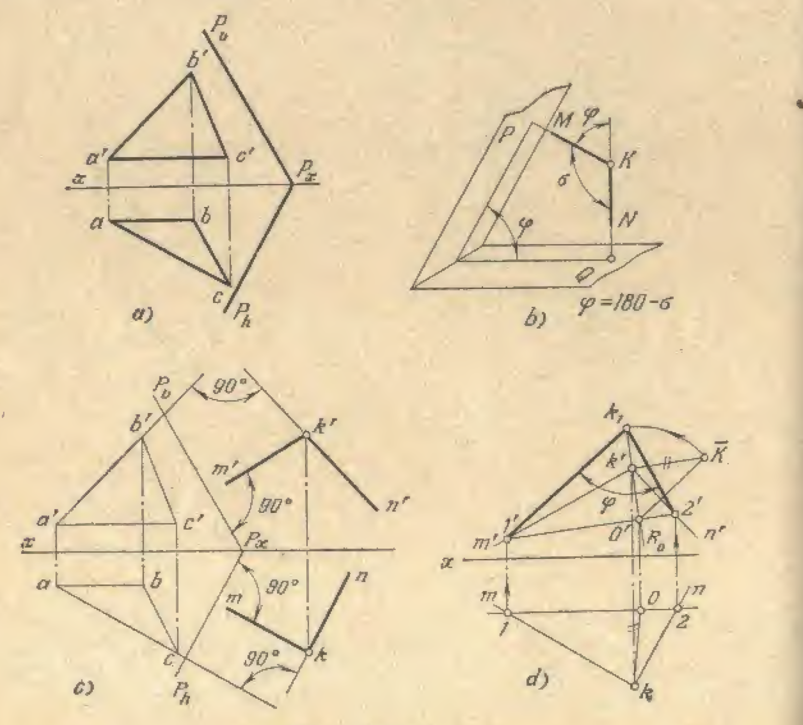


Fig. 172a — d.

Solución. Si, durante la resolución de este problema, nos atenemos al esquema de resolución del problema anterior, entonces es necesario construir la recta de intersección de los planos dados. Pero se puede proceder de otra manera, sin construir esta recta, o sea, sin determinar la arista del ángulo diedro buscado. Se puede proceder de la manera siguiente: determinar no directamente el ángulo φ, sino el ángulo σ (fig. 172, *b*) entre las perpendiculares KM y KN trazadas desde cualquier punto K a los planos dados. Una vez hallado el ángulo σ, obtenemos $\varphi=180°-\sigma$.

Tal resolución se diferencia por su esencia de las resoluciones según las figs. 171, *c* y 171, *d*. Tomando cierto punto K (fig. 172, *c*) levantamos desde él las perpendiculares KN y KM al plano del triángulo ABC y al plano P respectivamente: desde el punto k' trazamos $k'n'\perp a'b'$ y $k'm'\perp P_v$, y desde el punto k, $kn\perp ac$ y $km\perp P_h$. De este modo se obtiene un ángulo con las proyecciones mkn y $m'k'n'$ (el ángulo σ). La magnitud verdadera de este ángulo se ha obtenido mediante el giro alrededor de la frontal 1—2 (fig. 172, *d*). Puesto que se ha obtenido un ángulo agudo, se puede considerar que éste determina el ángulo buscado entre los planos dados, dado que de los ángulos adyacentes, obtenidos en la intersección mutua de dos planos, el ángulo entre los planos se considera agudo.

185. Está dada la pirámide $SABCD$ (véase la fig. 154). Determinar, por el método de cambio de los planos de proyección, los ángulos entre las caras SAB y SBC, SBC y SCD, SAD y SAB.

186. Viene dado un paralelepípedo (fig. 165). Determinar los ángulos entre las caras $CDHG$ y $EFGH$, $BCGF$ y $CDHG$.

§ 20. PROBLEMAS COMBINADOS CON EL EMPLEO DE LOS MÉTODOS DE TRANSFORMACIÓN DEL DIBUJO

187*. Colocar el punto A en el plano H con ayuda del giro alrededor de la recta MN (fig. 173, *a*).

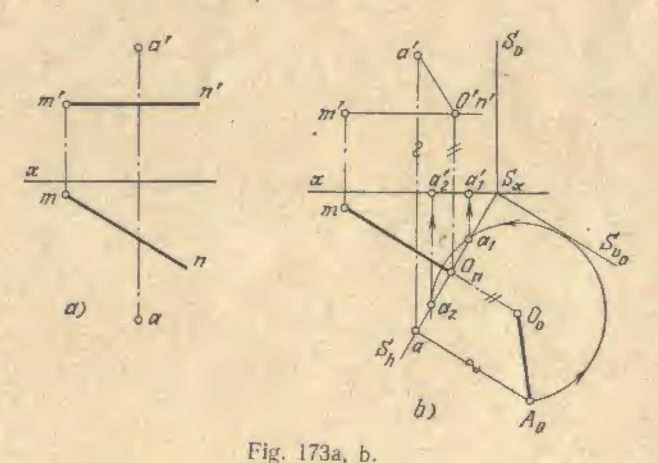


Fig. 173a, b.

Solución. El eje de giro (la recta MN), en este caso, es paralelo al plano H. Por esta razón, el plano de giro del punto A es un plano proyectante horizontal. Su traza S_h (fig. 173, *b*) pasa por la proyección a. Durante el giro alrededor de MN, el punto A describe en el plano S una circunferencia, cuya proyección horizontal se confunde con S_h; el centro de esta circunferencia se encuentra en el punto O de intersección del eje de giro MN con el plano S. Puesto que el plano S forma con el plano V

un ángulo agudo, la proyección de la circunferencia, situada en el plano S, se obtendrá sobre el plano V en forma de elipse. Para evitar la construcción de esta elipse, abatimos el plano S y los puntos O y A, pertenecientes a este plano, sobre el plano H. Esto dará la posibilidad de representar el arco de la circunferencia, por la que se desplaza el punto A, en verdadera magnitud. Según los datos del problema, el punto A, encontrándose en el plano S, deberá estar situado sobre el plano H; por consiguiente, después del giro, el punto A deberá estar situado sobre la traza S_h y confundirse con su proyección horizontal. Por eso, trazando el arco de radio O_0A_0 obtendremos los puntos a_1 y a_2, que son las proyecciones horizontales del punto A llevado al plano H. Con ayuda de los puntos a_1 y a_2 construimos sobre el eje x las proyecciones a'_1 y a'_2.

188. Llevar el punto A sobre el plano V, haciendo uso del giro alrededor de la recta MN (fig. 174).

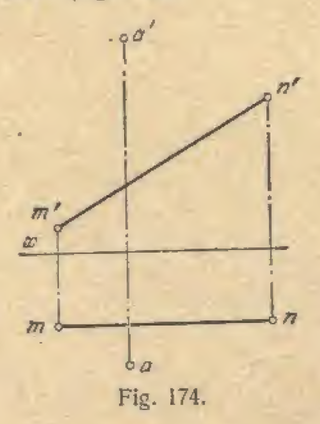


Fig. 174.

189*. Construir las proyecciones de una circunferencia situada sobre el plano P (fig. 175, a). Se conoce la magnitud del radio de esta circunferencia (R) y la posición de la proyección frontal (c') de su centro.

Solución. Primeramente hallamos la proyección c del centro de la circunferencia (con ayuda de la horizontal CN). Los puntos c' y c serán los centros de las elipses que representan las proyecciones de la circunferencia situada sobre el plano de posición general P.

En la fig. 175, b se muestra la construcción de los ejes de la elipse (la proyección horizontal de la circunferencia). El eje mayor está situado sobre la proyección horizontal de la horizontal CN y es igual a $2R$. La posición del eje menor también es conocida: éste es perpendicular a 1—2. Para hallar la magnitud de este eje (así como la del eje menor de la proyección frontal) se ha empleado el abatimiento del plano P sobre el plano H, lo que ofrece la posibilidad de representar la circunferencia en verdadera magnitud. Su diámetro 1_02_0 corresponde al segmento 1—2, es decir, al eje mayor de la elipse (la proyección horizontal de la circunferencia), y el diámetro 3_04_0, al eje menor de esta elipse. Trazando por el punto 3_0 la frontal del plano P en su posición abatida ($\parallel P_{v0}$), y luego la proyección horizontal de esta frontal, hallamos el punto 3 y con ello el semieje c—3. Trazando c—4=c—3 obtenemos el eje menor 3—4 de la elipse.

La construcción de los ejes de la elipse (la proyección frontal de la circunferencia) se muestra en la fig. 175, c. Aquí también es conocida la posición del eje mayor (éste está situado sobre la proyección frontal de la frontal, que pasa por el punto c') y la magnitud de este eje ($7'8'=2R$). El eje menor es perpendicular a $7'8'$. La magnitud

del eje menor se determina con auxilio del diámetro 5_06_0 de la circunferencia en su posición abatida sobre el plano H: al eje mayor $7'8'$ de la elipse le corresponde el diámetro 7_08_0 de la circunferencia, y al eje menor $5'6'$, el diámetro 5_06_0 perpendicular a 7_08_0. Trazando por 6_0 la frontal del plano P hasta su intersección con P_h, hallamos

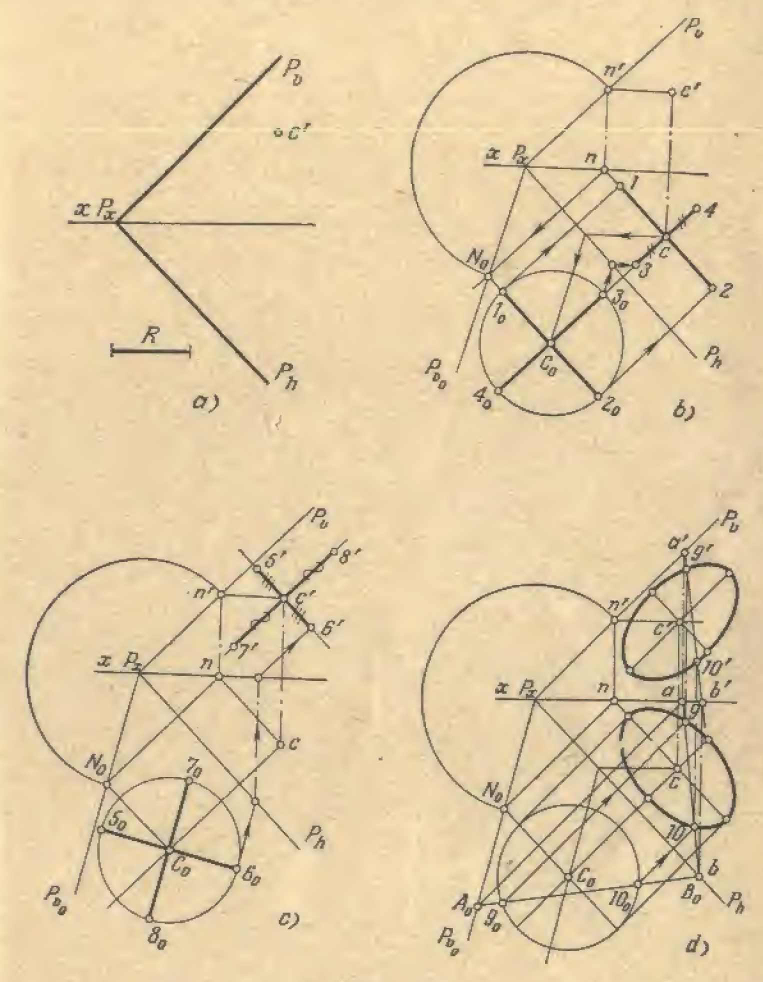


Fig. 175a — d.

la proyección frontal de esta frontal y sobre ella el punto $6'$ (el extremo del eje menor de la elipse). Trazando $c'5'=c'6'$, obtenemos el eje menor $5'6'$.

En la fig. 175, d se muestra la construcción de las proyecciones de algunos puntos de la circunferencia. Se han tomado los puntos 9_0 y 10_0 sobre la recta A_0B_0. Una vez construidas las proyecciones horizontal y frontal de esta recta, hallamos primero las proyecciones 9 y 10, y luego las $9'$ y $10'$.

Hallando una serie de puntos trazamos por ellos y por los extremos de los ejes las elipses: las proyecciones de la circunferencia.

190*. Construir las proyecciones de una circunferencia situada en el plano dado por su horizontal BC y su frontal CE (fig. 176, a). Se conoce la magnitud del radio de esta circunferencia y la posición de su centro (el punto C).

Solución. Hallamos la traza horizontal de la frontal (fig. 176, b) y trazamos por el punto m la traza P_h paralelamente a cb. Determinamos la magnitud del radio CO

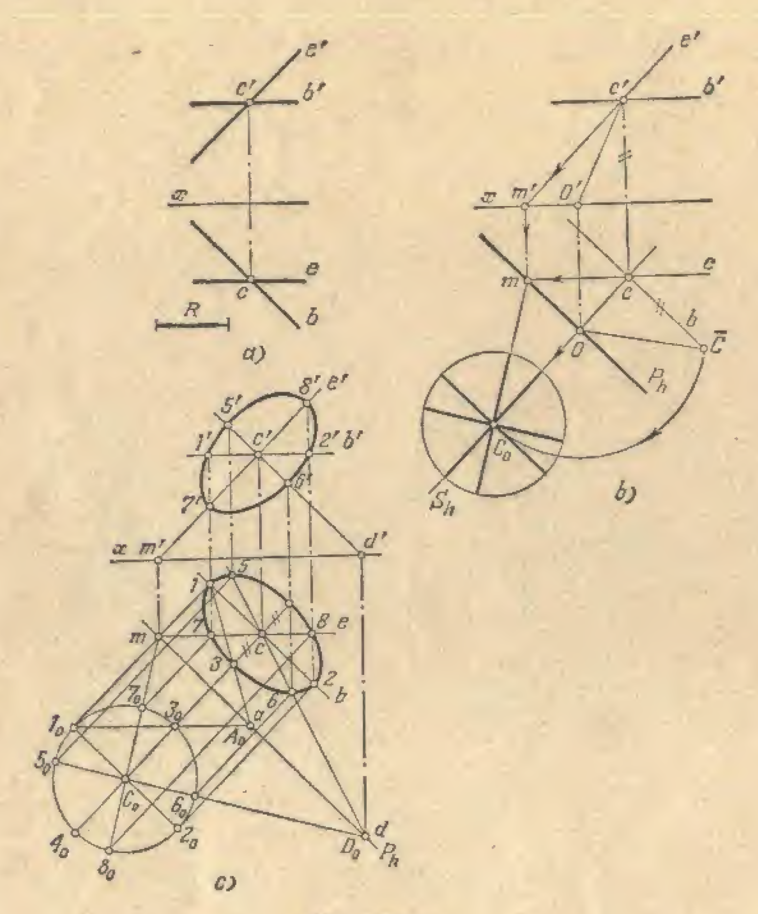


Fig. 176a — c.

como la magnitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo con los catetos cO y cC y hallamos la posición, abatida sobre el plano H, del centro C_0 de la circunferencia. En la fig. 176, c, el punto 3 se ha construido con ayuda de la recta $1_0 3_0$, prolongada hasta su intersección con P_h en el punto $A_0(a)$, y los puntos 5 y 6, con ayuda de la recta $5_0 6_0$ que pasa por el centro C_0 y que corta, en su prolongación, a la traza P_h en el punto $D_0(d)$.

Las demás construcciones son análogas a las efectuadas en la fig. 175, b y c. Estas están claras del dibujo.

191. Construir las proyecciones de una circunferencia circunscrita al triángulo ABC (fig. 177).

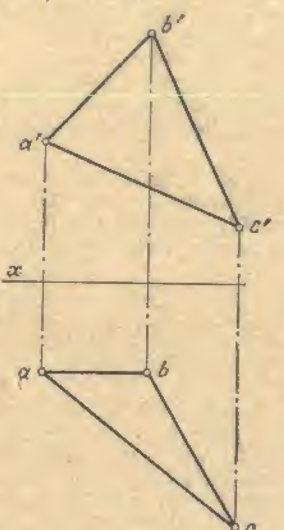


Fig. 177.

192*. Girar el plano, dado por el triángulo ABC, alrededor del eje OO_1 de modo tal, que el punto K se encuentre en este plano (fig. 178, a).

Solución. Si el punto K entra en el plano, entonces él se encontrará sobre una de las horizontales de este plano, a saber: en la horizontal que se encuentra a un

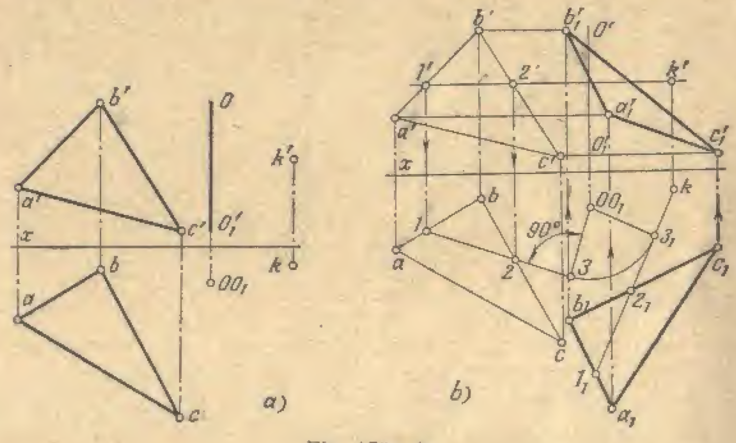


Fig. 178a, b.

mismo nivel con el punto K (fig. 178, b). Por esta razón, trazamos por el punto k' la proyección frontal de la horizontal, hallamos los puntos $1'$ y $2'$, y con ayuda de éstos, los puntos 1 y 2, y trazamos la proyección horizontal $1—2$ de la horizontal.

Ahora hay que girar la horizontal de modo tal, que pase por el punto K. Para ello trazamos desde el punto $O(O_1)$ la perpendicular a $1—2$, y con el radio $O—3$ trazamos un arco de circunferencia, respecto al cual la proyección horizontal de la horizontal es tangente en cualquier posición al girar el plano alrededor del eje dado OO_1. Por eso, trazando en el punto k la tangente a la circunferencia, determinamos la posición de la proyección horizontal de la horizontal, sobre la cual deberá estar situado el punto K después del giro requerido. Llevamos sobre esta proyección los puntos 1_1 y $2_1(3_11_1=1—3$ y $1_12_1=1—2)$, y luego construimos los puntos a_1, b_1 y c_1 sobre la base del corolario conocido que establece la invariabilidad de la forma y las dimensiones de la proyección horizontal de una figura al girarla alrededor de un eje perpendicular al plano H.

Valiéndonos de la proyección $a_1b_1c_1$ construimos la proyección $a_1'b_1'c_1'$. En la posición $A_1B_1C_1$ el triángulo pasa por el punto K.

Si trazamos por el punto K la segunda tangente a la circunferencia, obtendremos la segunda resolución. Concedemos al lector hallar esta posición del triángulo ABC.

193. Girar el plano, dado por el triángulo ABC, alrededor del eje OO_1 de modo tal, que el punto K se encuentre sobre este plano (fig. 179).

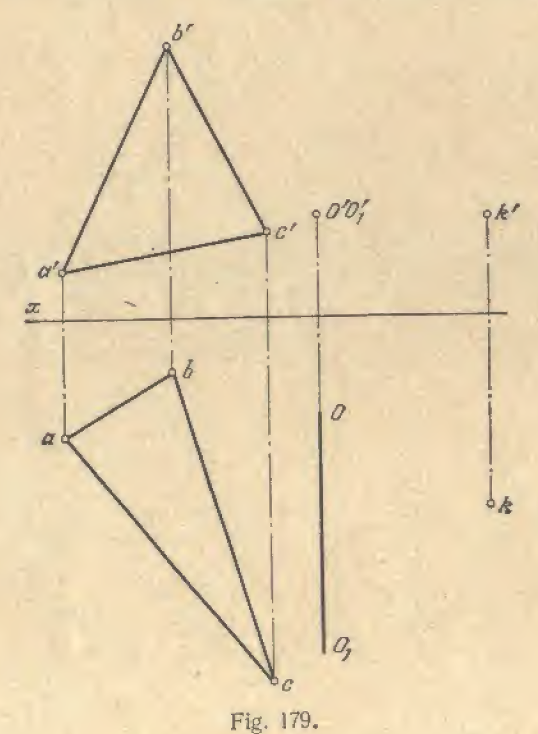


Fig. 179.

194*. Hallar la posición extrema de los ejes, en la cual todavía es soluble el problema 192.

Solución. Supongamos que el plano, como en el problema 192, viene dado por un triángulo (fig. 180, a), el eje, alrededor del cual se debe girar el plano, debe ser perpendicular al plano H y el punto K debe encontrarse en el plano del triángulo.

Del examen de la fig. 180, b se desprende que la proyección horizontal del eje OO_1 deberá estar situada de tal manera que la proyeccion k no se encuentre dentro de la circunferencia de radio $O—3$, puesto que por el punto k hay que trazar una tangente a esta circunferencia. Por consiguiente, la distancia desde el punto O hasta el k deberá ser no menor que la distancia desde este mismo punto hasta la recta $1—2$.

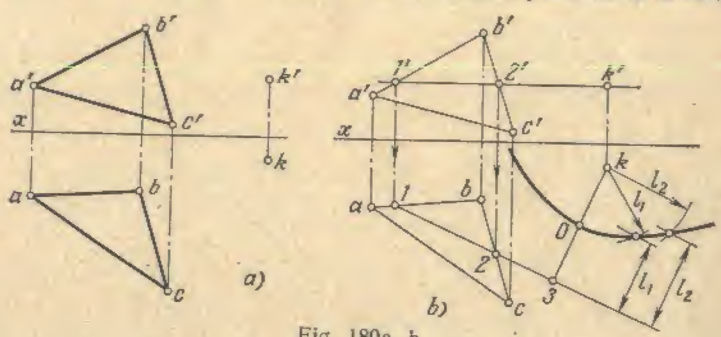


Fig. 180a, b.

Si se traza $k—3$ perpendicularmente a la recta $1—2$ y se divide el segmento $k—3$ por la mitad, entonces el punto O puede servir de proyección horizontal del eje, durante el giro alrededor del cual la proyección horizontal de la horizontal $1—2$ pasará por el punto k y, por lo tanto, el punto K quedará situado en el plano del triángulo ABC. Es evidente, que si tomamos un punto cualquiera más, la distancia desde el cual hasta el punto k y hasta la recta $1—2$ es la misma, entonces también este punto puede ser tomado en calidad de proyección horizontal del eje útil para resolver el problema planteado. Pero todos estos puntos que equidistan del punto k y de la recta $1—2$, pertenecen a una parábola cuyo foco se encuentra en el punto k y cuya directriz es la recta $1—2$. Por consiguiente, la posición extrema de los ejes se obtiene si sus proyecciones horizontales forman una parábola y los propios ejes representan las generatrices de un cilindro parabólico. En la fig. 180, b se muestra la construcción de la parábola con foco en el punto k y con la directriz $1—2$. Si se toma un segmento, por ejemplo el l_1, se traza una recta paralelamente a $1—2$ a la distancia l_1, y desde el punto k se describe un arco de radio l_1, se obtendrán dos puntos de la parábola. El vértice de la parábola se encuentra en el punto O.

Obviamente, los ejes, cuyas proyecciones horizontales se encontraran dentro de la parábola, no servirían para la observación de las condiciones del problema 192. Si se toman los ejes fuera del cilindro parabólico, entonces, en el curso de una vuelta del plano, el punto se encontrará dos veces sobre este plano.

195. Hallar la posición extrema de los ejes perpendiculares al plano V, durante el giro alrededor de los cuales el punto K se situará en el plano dado por el triángulo ABC (fig. 181).

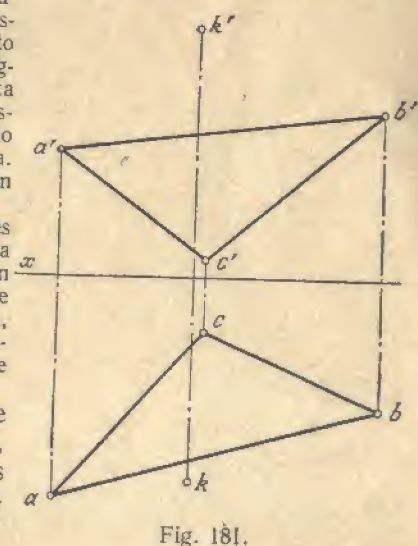


Fig. 181.

5*

Fig. 182a— e.

√

196*. Hallar el punto K, que se encuentra dentro de una pirámide y se halla a la distancia l_1 de la cara SAB, a la distancia l_2 de la cara SAG y a la distancia l_3 de la cara ABC (la base de la pirámide) (fig. 182, *a*).

Solución. El punto buscado se obtendrá como el punto de intersección de tres planos, cada uno de los cuales es el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a una distancia determinada de las caras de la pirámide.

Al introducir un plano auxiliar T perpendicular a la cara SAB (fig. 182, *b*), obtenemos la proyección de la pirámide, en la que la cara SAB se representa por la recta s_ta_t. El plano paralelo a la cara SAB y alejado de ésta a la distancia l_1, se representa por la recta 1_t2_t; este plano corta a la pirámide según el triángulo $1—2—3$ (en la fig. 182, *b* se muestra sólo la proyección horizontal).

El plano alejado de la cara SAC a la distancia l_2, se representa sobre el plano auxiliar Q, perpendicular a esta cara (fig. 182, *c*), en forma de la recta 4_q5_q y corta a la pirámide según el triángulo $4—5—6$ (viene dada solamente la proyección horizontal de este triángulo).

El punto buscado K deberá pertenecer a la línea de intersección de los planos dados por los triángulos $1—2—3$ y $4—5—6$. Esta recta pasa por los puntos M y N, obtenidos en la intersección de los lados $2—3$ y $6—5$, $1—3$ y $4—5$ de los triángulos $1—2—3$ y $4—5—6$ (fig. 182, *d*).

Hallamos la proyección frontal k' (fig. 182, *e*) sobre $m'n'$ de la condición de que el punto K se encuentra a la distancia l_3 de la cara ABC.

El lugar geométrico de estos puntos es el plano P paralelo a la cara ABC. Con ayuda de k' hallamos k sobre mn.

197. Hallar el punto K, que se encuentra dentro de un prisma a las distancias: l_1 de la cara $BCEF$, l_2 de la cara $ABDE$, l_3 de la base ABC (fig. 183).

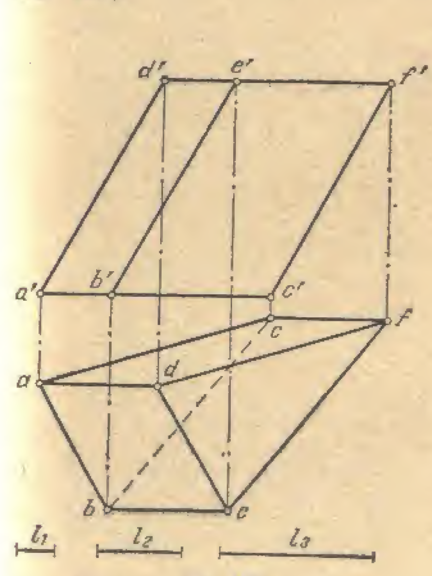


Fig. 183.

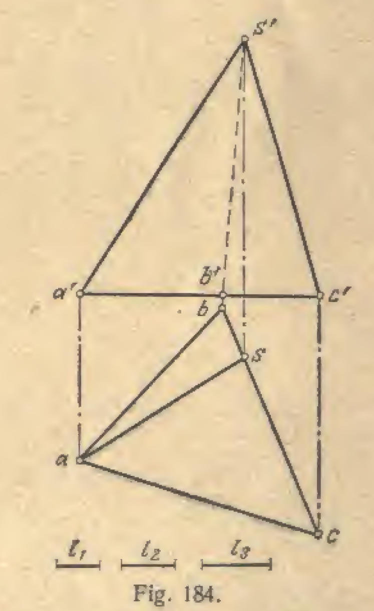


Fig. 184.

198. Hallar el punto K, que se encuentra dentro de la pirámide $SABC$ a las distancias: l_1 de la cara SAC, l_2 de la cara SBC, l_3 de la cara SAB (fig. 184).

199*. Construir el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados del ángulo BAC (fig. 185, *a*).

Solución. El lugar geométrico buscado es un plano que pasa por la bisectriz del ángulo dado perpendicularmente al plano de este ángulo (fig. 185, *b*). Por consiguiente, el plano buscado quedará determinado por dicha bisectriz y la perpendicular al plano del ángulo BAC, que corta a esta bisectriz.

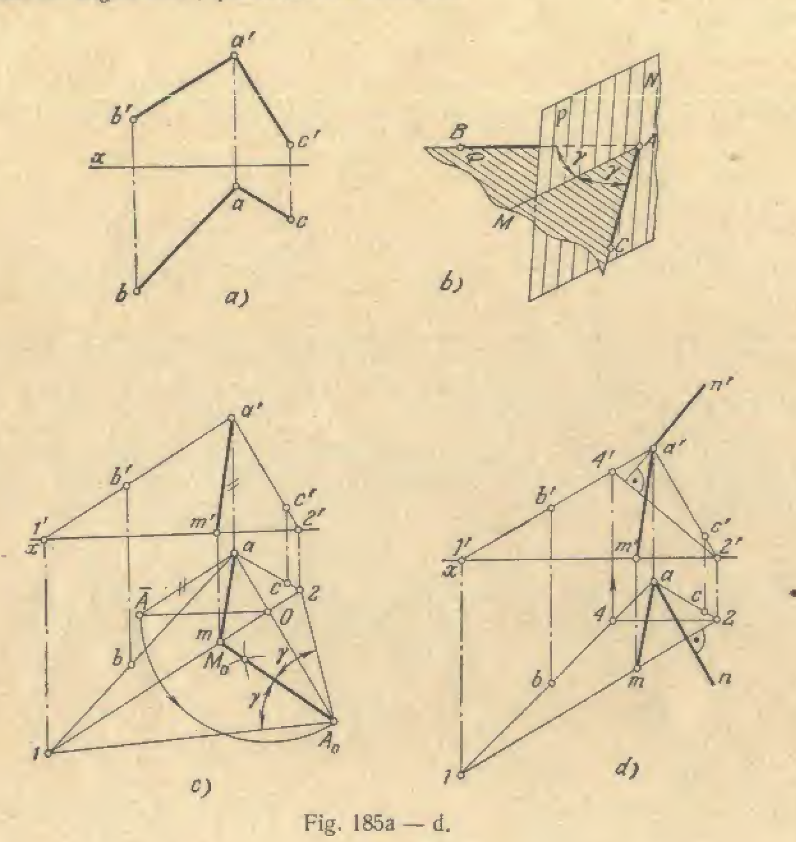


Fig. 185a — d.

Para trazar la bisectriz del ángulo BAC hay que construir este ángulo en tamaño natural, puesto que el trazado directo de la bisectriz en las proyecciones dadas del ángulo es posible exclusivamente en casos particulares, por ejemplo, si los lados del ángulo tienen una misma inclinación respecto al plano de proyección. En la fig. 185, *c* se muestra el abatimiento del plano del ángulo BAC sobre el plano H, para lo cual se ha construido la traza horizontal ($1—2$) de este plano. Ahora puede ser trazada la bisectriz del ángulo $1A_02$ (la recta A_0M_0) y se puede construir sus proyecciones am y $a'm'$.

Queda trazar la perpendicular al plano del ángulo BAC desde cualquier punto de su bisectriz y con esto determinar el plano buscado. En la fig. 185, *d* la perpendicular ha sido trazada por el vértice del ángulo (el punto A), para lo cual se ha usado la traza horizontal $1—2$ y se ha trazado la frontal $2—4$; la proyección de la perpendicular $an \perp 1—2$ y la proyección $a'n' \perp 2'4'$.

200. Construir el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados del ángulo BAC (fig. 186). Expresar el plano dado por sus trazas.

201*. Hallar en la recta EF ($EF \parallel$ plano V) un punto equidistante de los lados del ángulo BAC (fig. 187, *a*).

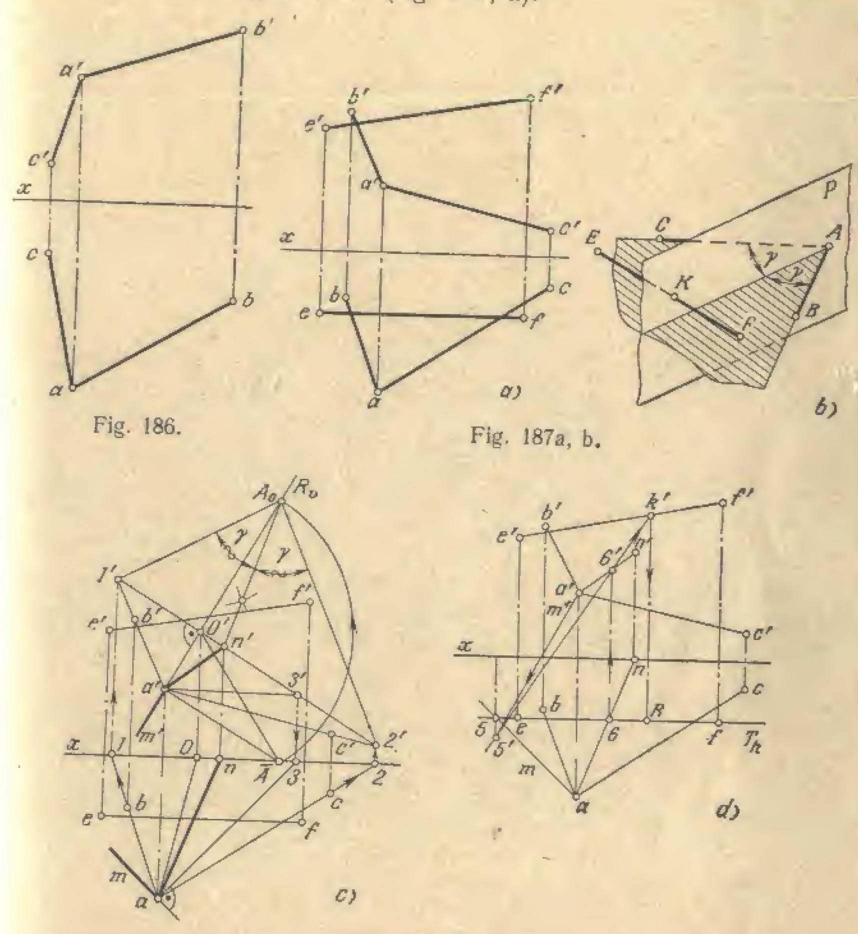


Fig. 186.

Fig. 187a, b.

Fig. 187c, d.

Solución. El lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados del ángulo BAC es el plano P que pasa por la bisectriz de este ángulo y que es perpendicular al plano de este ángulo (fig. 187, *b*). Evidentemente, el punto buscado (K) en la recta EF se obtendrá en la intersección de esta recta con el plano P.

La construcción del plano P en la fig. 187, *c* es análoga a la construcción en la fig. 185, *c*, con la única diferencia de que en la fig. 187, *c* el ángulo BAC ha sido abatido sobre el plano V girándolo alrededor de la traza frontal $1'2'$ del plano de este ángulo. Para construir las proyecciones de la perpendicular AM se ha hecho uso de la traza $1'2'$ y de la horizontal $A—3$: $a'm' \perp 1'2'$ y $am \perp a3$.

El punto K sobre la recta EF se ha obtenido por el método corriente de construcción del punto de intersección de la recta con el plano (fig. 187, *d*):

1) por EF se ha trazado el plano auxiliar T (puesto que la recta $EF \parallel$ plano V, ha resultado posible trazar por ella el plano frontal T).

2) se ha construido la recta de intersección del plano P (dado por las rectas AM y AN) con el plano T (ésta es la frontal del plano P, o sea, la recta con las proyecciones $5'6'$, $5—6$),

3) se ha hallado el punto de intersección de esta frontal con la recta EF (el punto K).

202. Hallar sobre el lado AB de la base de la pirámide $SABC$ (fig. 188) el punto K equidistante de las aristas SA y SC.

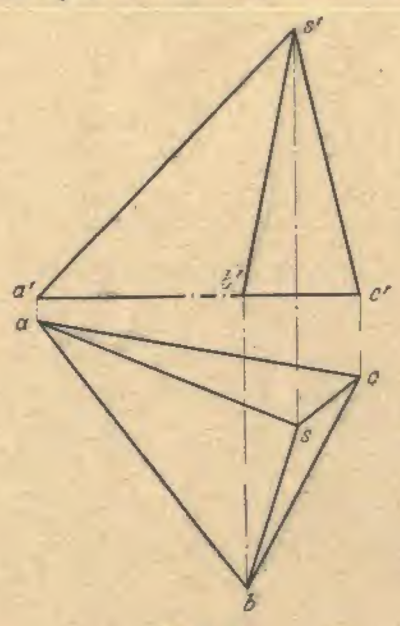


Fig. 188.

203. Hallar sobre la arista SC de la pirámide $SABC$ (véase la fig. 188) el punto M equidistante de la arista SA y del lado AB de la base.

204*. Hallar el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los planos P y Q (fig. 189, *a*).

Solución. El lugar geométrico buscado es (fig. 189, *b*) el plano R que divide por la mitad al ángulo diedro formado por los planos dados. El plano R pasa por la arista del ángulo diedro, o sea, por la recta MN. Si se coloca la arista MN perpendicularmente a un plano cualquiera de proyección T, entonces cada uno de los planos P y Q, así como el plano R, se representarán sobre este plano de proyección en forma de rectas, como se muestra en la fig. 189, *b*, con la particularidad de que R_t divide al ángulo formado por P_t y Q_t por la mitad.

Construida (fig. 189, *c*) la recta MN de intersección de los planos P y Q, introducimos (fig. 189, *d*) los planos auxiliares S ($S \perp H$ y $S \parallel MN$) y T ($T \perp S$ y $T \perp MN$). El ángulo entre las rectas construidas m_tP_{xt} y m_tQ_{xt} es igual al ángulo formado por los planos P y Q, y la bisectriz de este ángulo m_tR_{xt} es la traza del plano buscado R sobre el plano auxiliar T. Llevando el punto R_x a la recta P_xQ_x, es decir, al eje V/H, hallamos la proyección R_{xs} sobre $P_{xs}Q_{xs}$ y R_x sobre P_xQ_x, o sea, sobre el eje V/H. En el punto R_x las trazas del plano buscado cortan al eje V/H, y puesto que el plano R pasa por la recta MN, entonces la traza R_v pasa por el punto n', y la traza R_h, por el punto m.

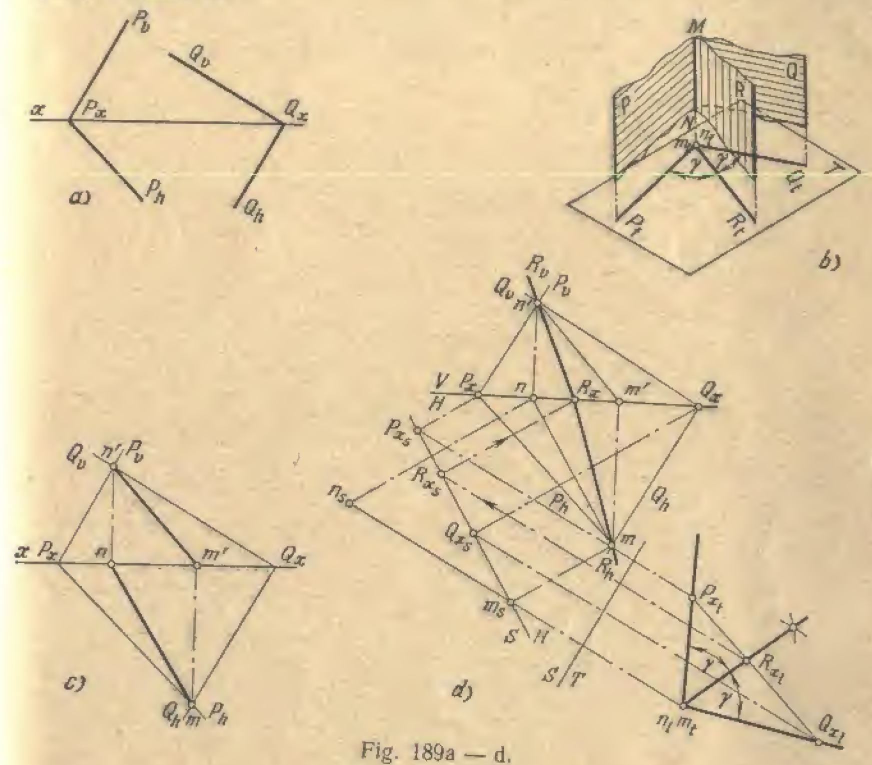


Fig. 189a — d.

205. Hallar el lugar geométrico de los puntos equidistantes del plano P y del plano dado por las rectas AB y CD (fig. 190).

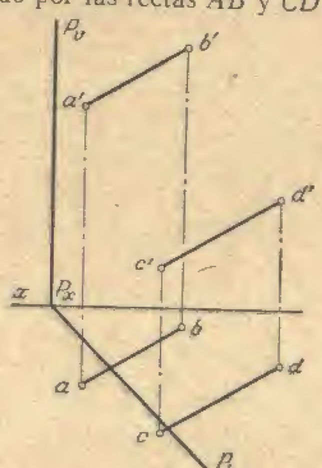


Fig. 190.

206*. Hallar sobre la recta AB un punto equidistante de los planos dados por los triángulos MNC y MND (fig. 191, *a*).

Solución. El punto buscado es el punto de intersección de la recta AB con el plano (R) que divide al ángulo formado por los planos dados por la mitad (fig. 191, *b*).

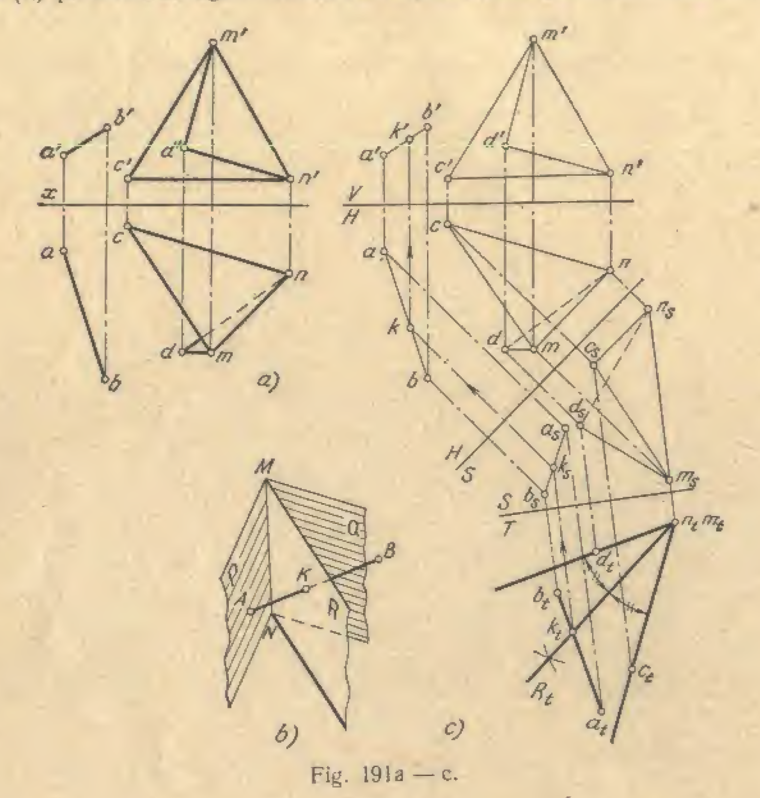


Fig. 191a — c.

La marcha de la construcción es análoga a la empleada en el problema 204. Por medio de la introducción de los planos auxiliares de proyección S y T obtenemos la posición, en la que la arista MN se proyecta sobre el plano T en un punto (fig. 191, *c*).

En esta posición representamos el plano, que divide el ángulo entre las caras MNC y MND por la mitad, en forma de la recta R_t. En la intersección de la recta $a_t b_t$ con R_t obtendremos la proyección del punto buscado K sobre el plano T; valiéndonos de esta proyección hallamos k_s sobre $a_s b_s$, y luego k sobre ab y k' sobre $a'b'$.

207. Hallar sobre la arista SB de la pirámide $SABC$ el punto K equidistante de la cara SAC y la base ABC (véase la fig. 188).

208. Hallar sobre el lado AB de la base de la pirámide $SABC$ el punto M equidistante de las caras SAC y SBC (véase la fig. 188).

209*. Trazar por el punto A una recta de posición general que forma con el plano H un ángulo α y con el plano V un ángulo β (fig. 192, *a*).

Solución. Es conocido (véase el problema 22) que para una recta de posición general $\alpha+\beta<90°$.

En la fig. 192, *b* y *c* se muestra la construcción de la recta buscada con el empleo del método de giro. En estos dibujos se representan dos rectas: una (AB_1) está situada paralelamente al plano V y la otra (AB_2) es paralela al plano H. A ambas rectas se han llevado los segmentos iguales AB_1 y AB_2 : $a'b_1'=ab_2$.

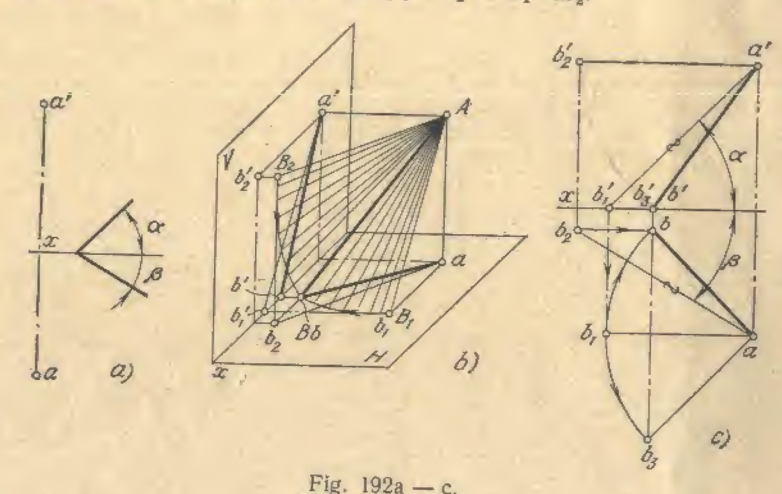


Fig. 192a — c.

Si giramos ahora el segmento AB_1 alrededor del eje perpendicular al plano H, y el segmento AB_2, alrededor del eje perpendicular al plano V, con la particularidad de que ambos ejes pasan por el punto A, entonces en cierto momento ambos segmentos coincidirán (en la fig. 192, *b* esto se muestra en forma del segmento AB), y, por lo tanto, la recta buscada queda construida.

En total, por el punto A se pueden trazar cuatro rectas. En el dibujo (fig. 192, *c*) trazamos un arco de circunferencia de radio ab_1 hasta su intersección en el punto b con la recta que pasa por el punto b_2 paralelamente al eje x. Con ayuda del punto b hallamos b'.

En la fig. 192, *c* se muestra una posición más (de las cuatro posibles) de la recta designada por AB_3.

210. Trazar por el punto A, hacia la derecha de éste, una recta de posición general AB situada bajo un ángulo α al plano H y bajo un ángulo β al plano V (fig. 193), con la condición de que el punto B pertenece al plano H y se encuentra a menor distancia del plano V que el punto A.

211. Trazar por el punto A, hacia la derecha de éste, los segmentos AB, AC, AD y AE situados bajo un ángulo α al plano H y bajo un ángulo β al plano V (fig. 194).

212*. Trazar por el punto A un plano que forma con el plano H un ángulo α_1 y con el plano V un ángulo β_1 (fig. 195, *a*).

Solución. Para la construcción del plano buscado, en este caso se ha empleado la dependencia entre los ángulos formados por cierta recta con el plano H (el ángulo α) y con el plano V (el ángulo β), y los ángulos formados por el plano perpendicular a esta recta con los mismos planos de proyección H (el ángulo α_1) y V (el ángulo β_1). Es sabido que $\alpha_1+\alpha=90°$ (fig. 195, *b*) y $\beta_1+\beta=90°$. De aquí se desprende que

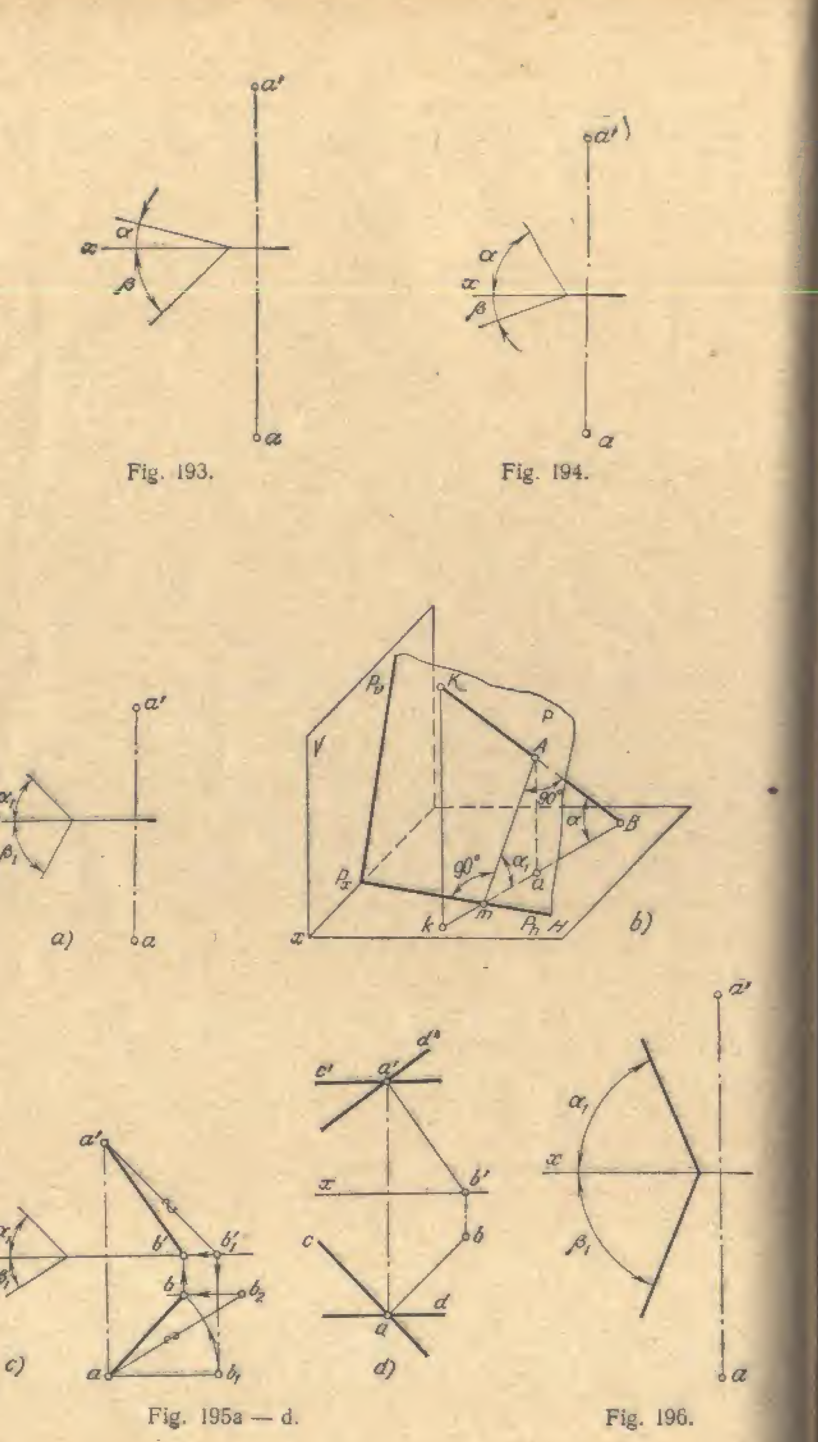


Fig. 193. Fig. 194.

Fig. 195a — d. Fig. 196.

$180^\circ>\alpha_1+\beta_1>90^\circ$. Esto permite verificar si los ángulos α_1 y β_1 han sido elegidos correctamente (fig. 195, *a*).

Ahora bien, determinados los ángulos $\alpha=90^\circ-\alpha_1$ y $\beta=90^\circ-\beta_1$, trazamos por el punto *A* una recta bajo los ángulos α y β a los planos *H* y *V* respectivamente (fig. 195, *c*), como esto tuvo lugar en el problema 209. Ahora trazamos por el punto *A* un plano perpendicular a la recta construida *AB*. Este plano, en la fig. 195, *d* viene expresado por su horizontal y frontal: $a'd' \perp a'b'$, $ac \perp ab$.

213. Trazar por el punto *A* dos planos (expresándolos por sus trazas) bajo los ángulos α_1 al plano *H* y β_1 al plano *V* (fig. 196), construyendo dos rectas auxiliares bajo los ángulos $\alpha=90^\circ-\alpha_1$ al plano *H* y $\beta=90^\circ-\beta_1$ al plano V: una hacia la derecha, hacia dentro, hacia abajo del punto *A*, y la otra hacia la derecha, hacia dentro, hacia arriba del mismo punto.

214*. Construir una pirámide triangular regular con el vértice en el punto *S*. La altura de la pirámide forma con el plano *H* un ángulo α y con el plano *V* un ángulo β. El punto *A* es uno de los vértices de la base (fig. 197, *a*).

Solución. Trazamos (fig. 197, *b*) por el punto *S* una recta *SM* bajo los ángulos dados α y β a los planos *H* y *V* (véase el problema 209). El plano de la base de la pirámide deberá pasar por el punto *A* perpendicularmente a *SM*; expresamos este plano por su horizontal *AN* y su frontal *AK* (fig. 197, *c*). Hallamos el punto *O* de intersección de la recta *SM* con el plano de la base. Para ello colocamos la recta *SM* en el plano proyectante frontal *R* representado solamente por su traza frontal R_v. Para construir los vértices *B* y *C* de la pirámide giramos el plano de la base alrededor de la horizontal *A—3* hasta abatirlo sobre el plano *T* (fig. 197, *d*).

En el plano de la base trazamos por el punto *O* una recta arbitraria *3—4*. Construimos la posición abatida sobre el plano *T* del punto $4|4_1|$ y unimos 4_1 con el punto *3*. Sobre la recta $3—4_1$ hallamos el punto O_1, desde el cual, con radio $O_1—a$, describimos una circunferencia. Dividiendo esta circunferencia en tres partes, hallamos los vértices b_1 y c_1. Conociendo b_1 y c_1 hallamos (fig. 197, *e*) las proyecciones horizontales: *c* se encuentra en la prolongación de la recta *a—5* (hallando primero el punto *5* con ayuda del 5_1), *b* está situado sobre la recta *a—6* (hallando primeramente el punto *6* valiéndonos del 6_1). Luego construímos las rectas $a'5'$ y $a'6'$ y sobre ellas los puntos c' y b'; $a'b'c'$ y *abc* son las proyecciones de la base de la pirámide. En la fig. 197, *c* las proyecciones de los vértices s' y *s* se han unido con las proyecciones del mismo nombre de los vértices de la base.

215. Construir una pirámide rectangular regular con el vértice en el punto *S*. La altura de la pirámide forma con el plano *H* un ángulo α y con el plano *V* un ángulo β. El punto *A* es uno de los vértices de la base (fig. 198).

216*. Construir un cubo con base en un plano, que forma con el plano *H* un ángulo α_1 y con el plano *V* un ángulo β_1. El segmento $a'\ b'$ es la proyección frontal del lado de la base del cubo (fig. 199, *a*).

Solución. Construimos una recta arbitraria *MS* (fig. 199, *b*), situada bajo un ángulo $\alpha=90^\circ-\alpha_1$ al plano *H* y bajo un ángulo $\beta=90^\circ-\beta_1$ al plano *V*.

Esta recta nos da la dirección de las aristas laterales del cubo. Ahora trazamos por el punto *A* el plano *P* (fig. 199, *c*) perpendicular a esta recta y hallamos sobre el plano *P* el punto *B*. Abatimos el plano *P* y el segmento *AB*, que se encuentra en este plano, sobre el plano *H* (fig. 199, *d*) y acabamos de construir el cuadrado $A_0B_0C_0D_0$. A continuación llevamos los puntos D_0 y C_0 al espacio: el punto D_0 con ayuda de la recta I_02_0 y el punto C_0 con auxilio de la frontal abatida 3_0C_0.

Puesto que las aristas del cubo son perpendiculares a la base, entonces, trazamos por el punto *A* (fig. 199, *e*) una recta perpendicular al plano $P(a'4' \perp P_v$ y

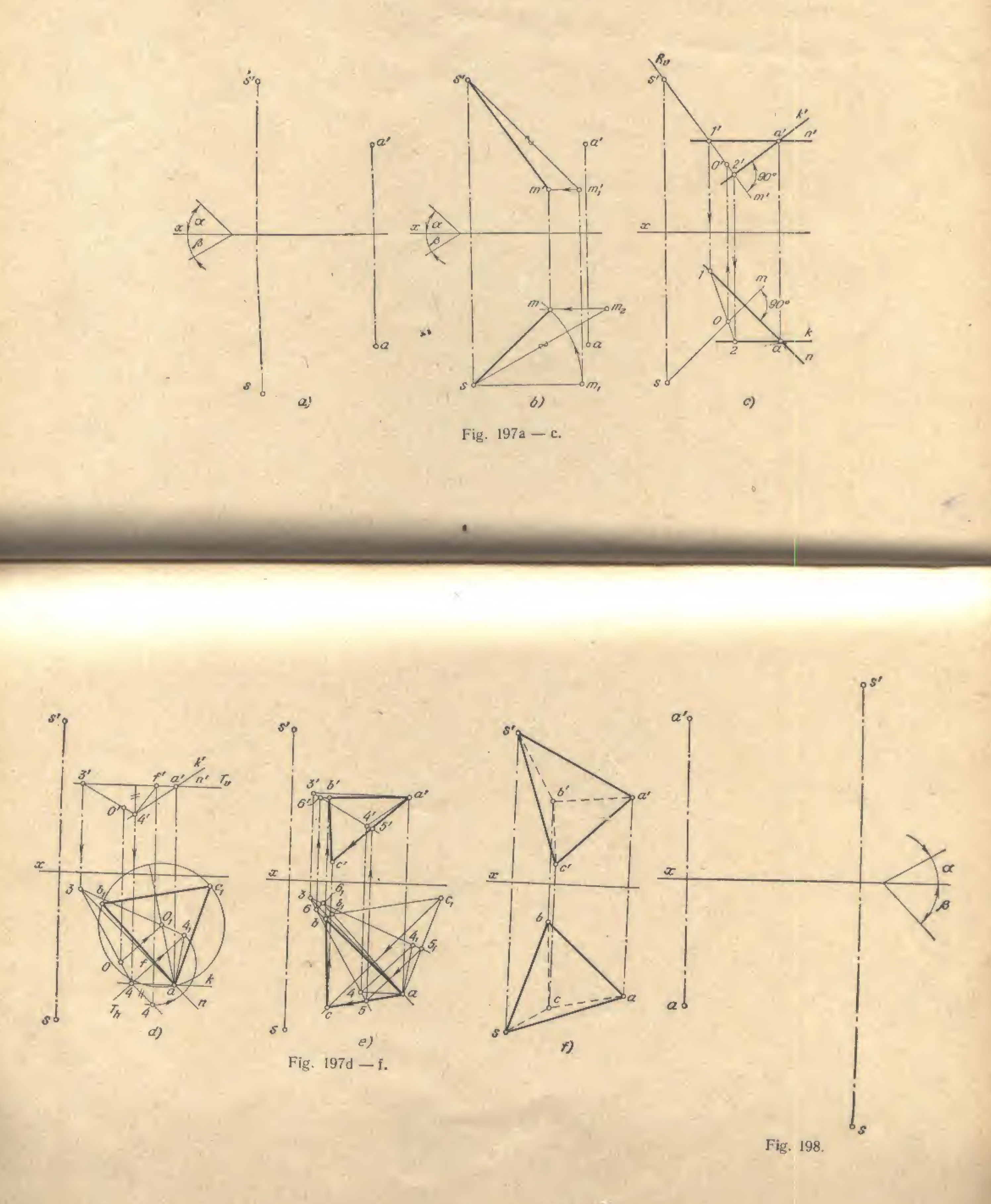


Fig. 197a — c.

Fig. 197d — f.

Fig. 198.

Fig. 199a — f.

$a—4 \perp P_h$). Llevamos sobre esta recta el segmento AE igual a uno de los lados de la base, por ejemplo, al A_0B_0. Esto se ha cumplido construyendo un triángulo rectángulo. Obteniendo de tal modo las proyecciones $a'e'$ y ae construimos (fig. 199, *f*) las proyecciones del cubo.

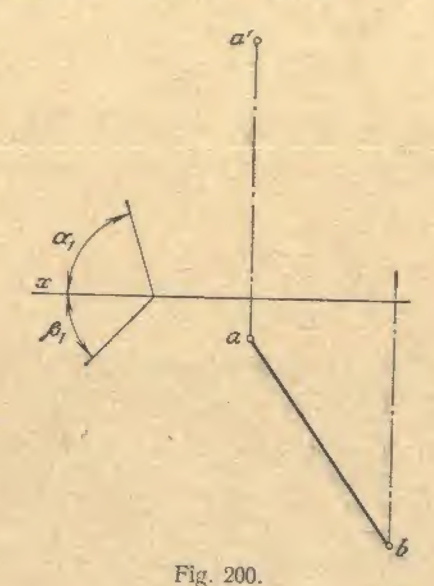


Fig. 200.

217. Construir un prisma triangular recto con base en forma del triángulo isósceles ABC situada sobre un plano que forma con el plano H un ángulo α_1 y con el plano V un ángulo β_1. El vértice C del triángulo ABC se encuentra en el plano H. La altura del prisma es igual al lado AB de la base, o sea, del triángulo ABC (fig. 200).

VI

CAPÍTULO

LÍNEAS CURVAS Y SUPERFICIES

§ 21. LÍNEAS CURVAS. SUPERFICIES. PUNTOS EN LAS SUPERFICIES

218*. Construir las proyecciones de una línea helicoidal cilíndrica a la derecha, que pasa por el punto A perteneciente a la superficie del cilindro. El punto está dado por su proyección frontal (fig. 201). Trazar una recta tangente a la línea helicoidal en el punto A. Tomar el paso de la línea helicoidal igual a la altura del cilindro.

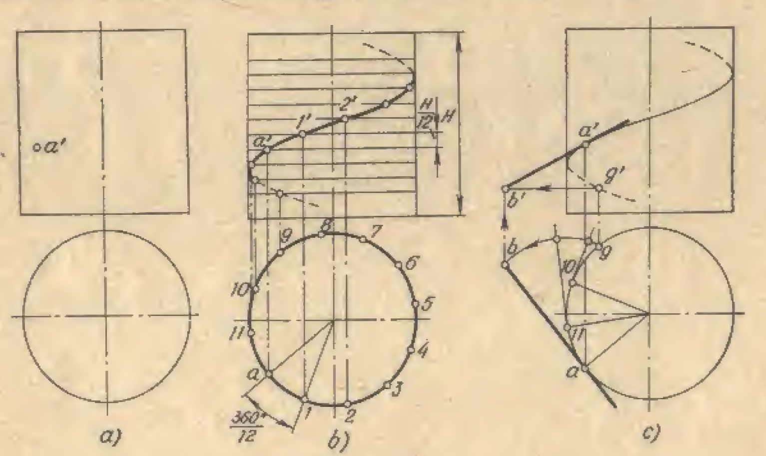


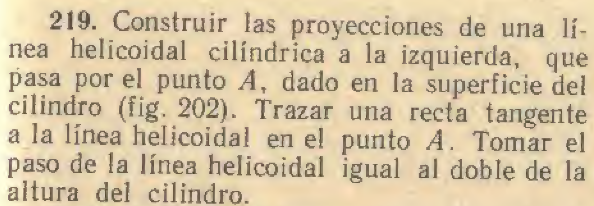
Fig. 201a — c.

Solución. En la posición del cilindro dada en la fig. 201, *a*, la proyección horizontal de la línea helicoidal representa una circunferencia. Dividimos (fig. 201, *b*) la circunferencia, a partir del punto *a*, en 12 partes iguales. Hacia arriba y hacia abajo del punto *a'* trazamos segmentos iguales a H: 12. Construimos las proyecciones frontales de una serie de puntos pertenecientes a la línea helicoidal (la construcción está clara del dibujo).

Partiendo de que la tangente a una curva se proyecta como tangente a la proyección de esta curva, trazamos una tangente a la circunferencia en el punto *a* (fig.

201, *c*). Esta es la proyección horizontal de la tangente a la línea helicoidal en el punto A.

Todas las tangentes a una línea helicoidal cilíndrica se cortan con el plano perpendicular al eje de esta línea en puntos, con los cuales se forma la evolvente de la circunferencia. Hallamos el punto *b* como punto de la evolvente, llevando a la tangente, a partir del punto *a*, el segmento *ab* igual por su longitud a tres arcos (*a* — —1)+(11—10)+(10—9). La proyección frontal *b'* se obtiene al nivel del punto *9'*. La proyección frontal de la tangente pasa por los puntos *a'* y *b'*.



219. Construir las proyecciones de una línea helicoidal cilíndrica a la izquierda, que pasa por el punto A, dado en la superficie del cilindro (fig. 202). Trazar una recta tangente a la línea helicoidal en el punto A. Tomar el paso de la línea helicoidal igual al doble de la altura del cilindro.

220*. Construir las proyecciones de una sección de una línea helicoidal cilíndrica de radio R (fig. 203, *a*), que pasa por los puntos dados A y B, y determinar la longitud de esta sección (la distancia más corta entre los puntos A y B sobre la superficie cilíndrica).

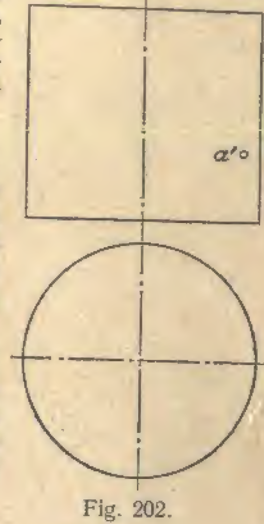


Fig. 202.

Solución. La proyección horizontal de la sección buscada de la línea helicoidal es el arco *ab*. Dividimos (fig. 203, *b*) el ángulo σ y la distancia H en n partes

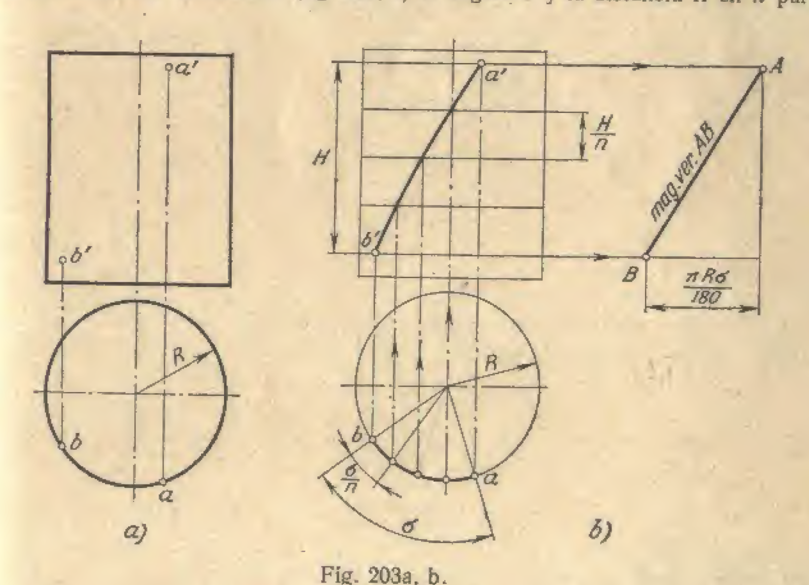


Fig. 203a, b.

iguales (en el caso dado $n=4$) y construimos las proyecciones de los $n-1$ puntos pertenecientes a la línea helicoidal, sin contar los puntos A y B.

Para hallar la distancia más corta entre los puntos A y B construimos el desarrollo de la sección AB de la línea helicoidal. Esta representa la hipotenusa de un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es igual a H y el otro, a $\frac{\pi R \alpha}{180}$.

221. Construir las proyecciones de una sección de una línea helicoidal cilíndrica de radio R (fig. 204), que pasa por los puntos dados A y B y determinar la longitud de esta sección (la distancia más corta entre los puntos A y B de la superficie cilíndrica).

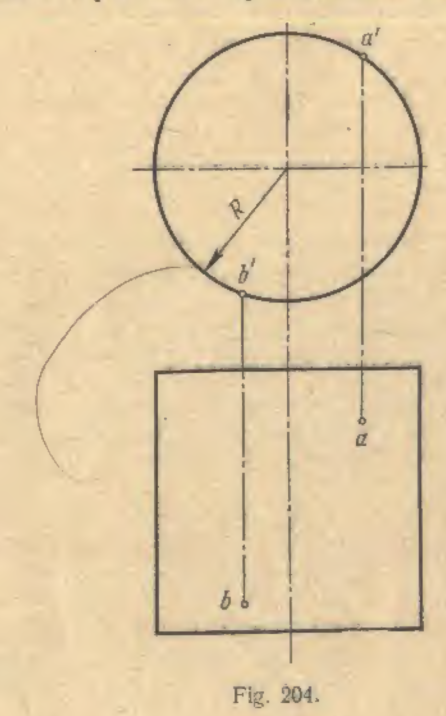


Fig. 204.

222*. Hallar la línea de intersección de una superficie cilíndrica, dada (fig. 205, *a*) por la generatriz CD y la directriz AB, con el plano H.

Solución. Fijamos sobre la curva AB una serie de puntos y trazamos (fig. 205, *b*) por ellos las generatrices. El lugar geométrico de las trazas horizontales de las generatrices será la curva buscada m_1m_2, $m_1'm_2'$.

223. Hallar la línea de intersección de una superficie cilíndrica, dada (fig. 206) por la generatriz CB y la directriz AB, con el plano V.

224*. Construir las proyecciones de un cilindro circular recto, cuyo eje es la recta MN (MN es paralela al plano V, fig. 207, *a*), la circunferencia de la base inferior pasa por el punto A, y el plano de su base superior pasa por el punto B.

Solución. Valiéndonos de que, según los datos del problema, el eje del cilindro es paralelo al plano V, trazamos (fig. 207, *b*) desde los puntos B y A perpendiculares al eje del cilindro y hallamos los puntos O_1 y O_2 (los centros de las circunferencias de

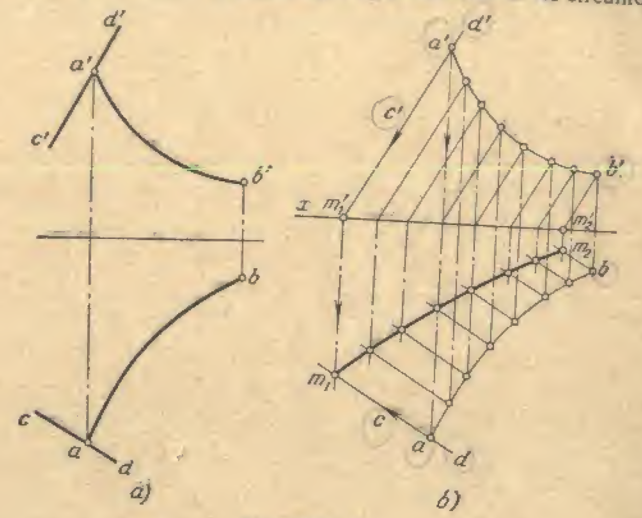


Fig. 205a, b.

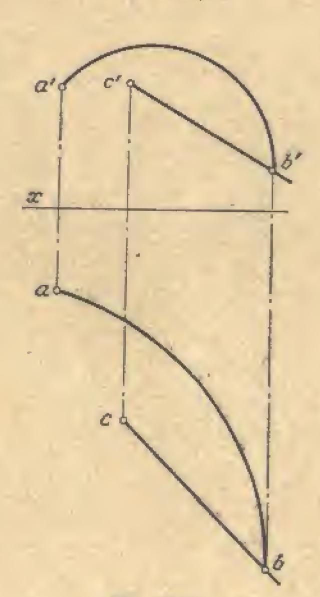


Fig. 206.

las bases) y la altura del cilindro (el segmento $O_1'O_2'$). Ahora hay que hallar el radio de la base del cilindro. Empleamos el método de cambio de los planos de proyección. Introducimos el plano auxiliar S perpendicular al plano V y al eje del cilindro. El radio buscado se determina por las proyecciones O_{2s} y a_s (fig. 207, *c*).

Construimos la proyección frontal del cilindro buscado. Para construir la proyección horizontal del cilindro hallamos (fig. 207, *d*) los ejes menores *1—2* y *3—4* de las elipses (las proyecciones de las bases del cilindro). Los ejes mayores de las elipses

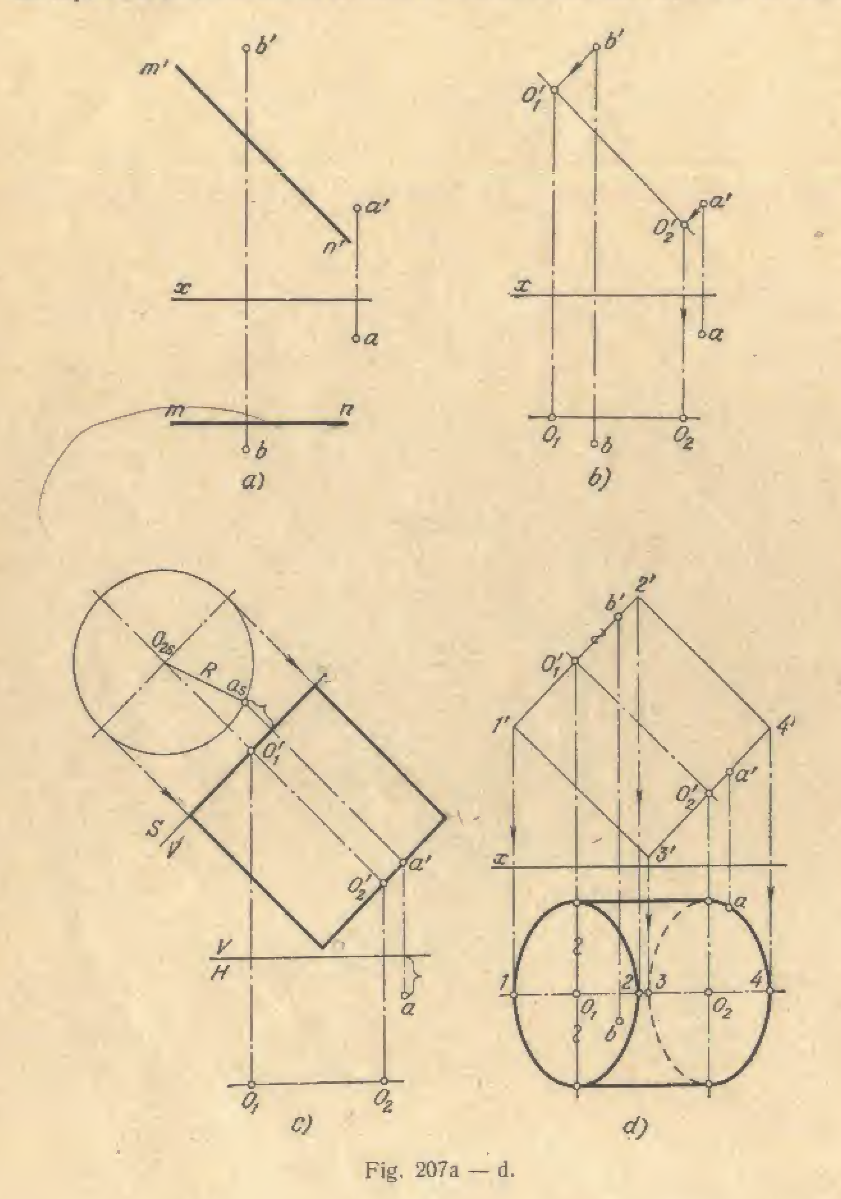


Fig. 207a — d.

son iguales al diámetro de la base. Construimos estas elipses y, trazando las proyecciones de las generatrices de contorno, obtenemos la proyección horizontal del cilindro.

225. Construir las proyecciones de un cilindro circular recto, cuyo eje se encuentra sobre la recta *OM* (*OM* es paralela al plano *H*, fig. 208), el punto *O* es el centro de una de sus bases, el punto *A* pertenece a la superficie cilíndrica; la altura del cilindro es igual al diámetro de la base.

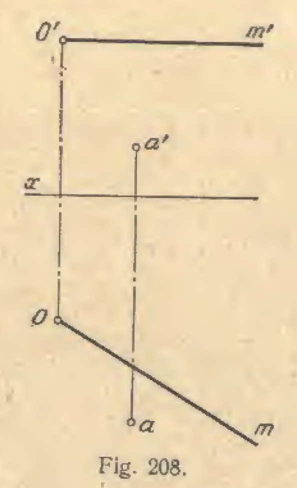


Fig. 208.

226*. Construir las proyecciones de un cilindro circular recto cuyo eje *OM* (fig. 209, *a*) es tangente al plano dado por el triángulo *ABC*. La altura del cilindro, contando desde el punto *O*, debe tomarse igual a diámetro y medio de la base. Las rectas *OM* y *BC* son paralelas entre sí.

Solución. Si el eje del cilindro resulta perpendicular al plano de proyección, entonces el plano tangente al cilindro se representará sobre este plano de proyección en forma de recta tangente a la circunferencia, o sea, a la proyección del cilindro. Con esto quedará determinado el radio de la base del cilindro. Realizamos tal construcción empleando el método de cambio de los planos de proyección. (fig. 209, *b*). Introducimos un plano auxiliar *S*, tomándolo perpendicular al plano *H* y paralelo al eje del cilindro *OM* (el eje $S/H \| Om$), y luego un plano auxiliar más *T* perpendicular al plano *S* y a *OM*(el eje $T/S \perp O_s m_s$).

Sobre el plano *T* la superficie cilíndrica se proyecta en forma de una circunferencia con centro en el punto O_t, y el plano del triángulo *ABC*, tangente al cilindro y, por consiguiente, paralelo al eje *OM*, se proyecta en el segmento $a_t b_t$ de una recta tangente a esta circunferencia. De aquí obtenemos el diámetro de la circunferencia de la base del cilindro, igual a $2k_t O_t$.

En la fig. 209, *c* se muestra la construcción de la proyección horizontal del cilindro.

En la fig. 209, *d* se muestra la construcción de la proyección frontal del cilindro. Para hallar la magnitud del eje menor de la elipse en esta proyección se ha introducido un plano auxiliar más *Q*, perpendicular al plano *V* y paralelo a *OM* (el eje $Q/V \| O'm'$). Hallamos la proyección del cilindro sobre el plano *Q* y con su ayuda obtenemos la proyección frontal del cilindro.

227*. Hallar la línea de intersección de una superficie cónica, dada por su vértice *S* y su directriz *AB*, con el plano *H* (fig. 210, *a*).

Fig. 209a — d.

Solución. Fijamos sobre la curva AB una serie de puntos (fig. 210, *b*) y trazamos por ellos las generatrices del cono. El lugar geométrico de las trazas horizontales de las generatrices será la curva buscada M_1M_2.

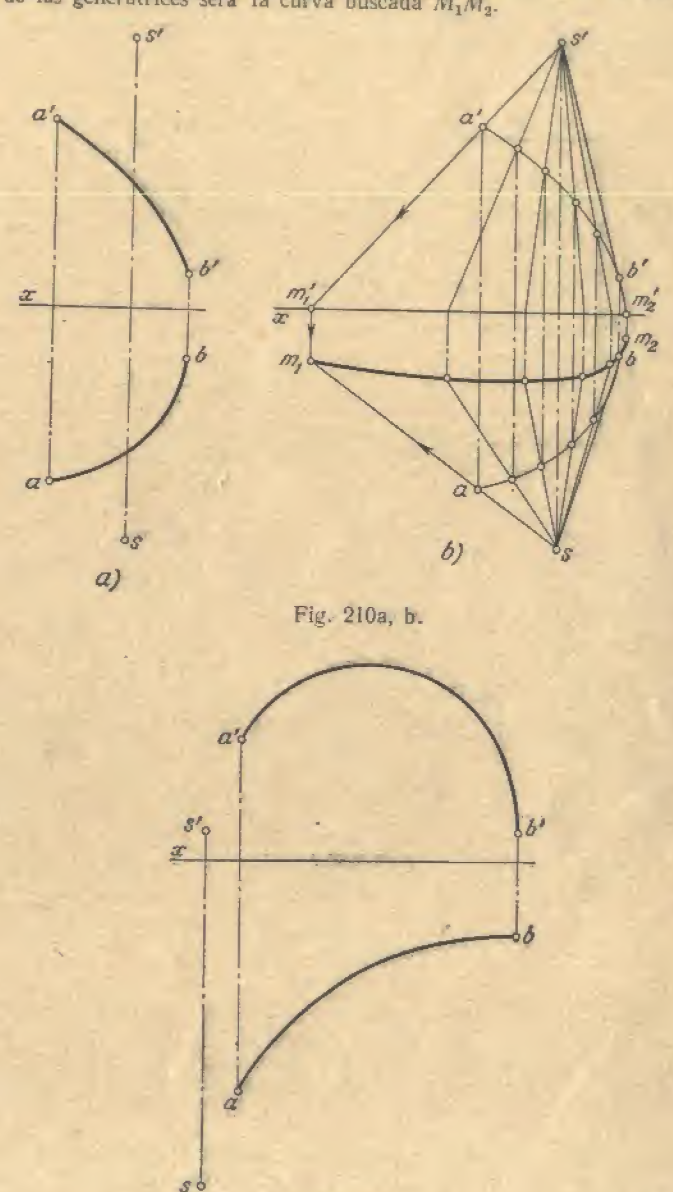
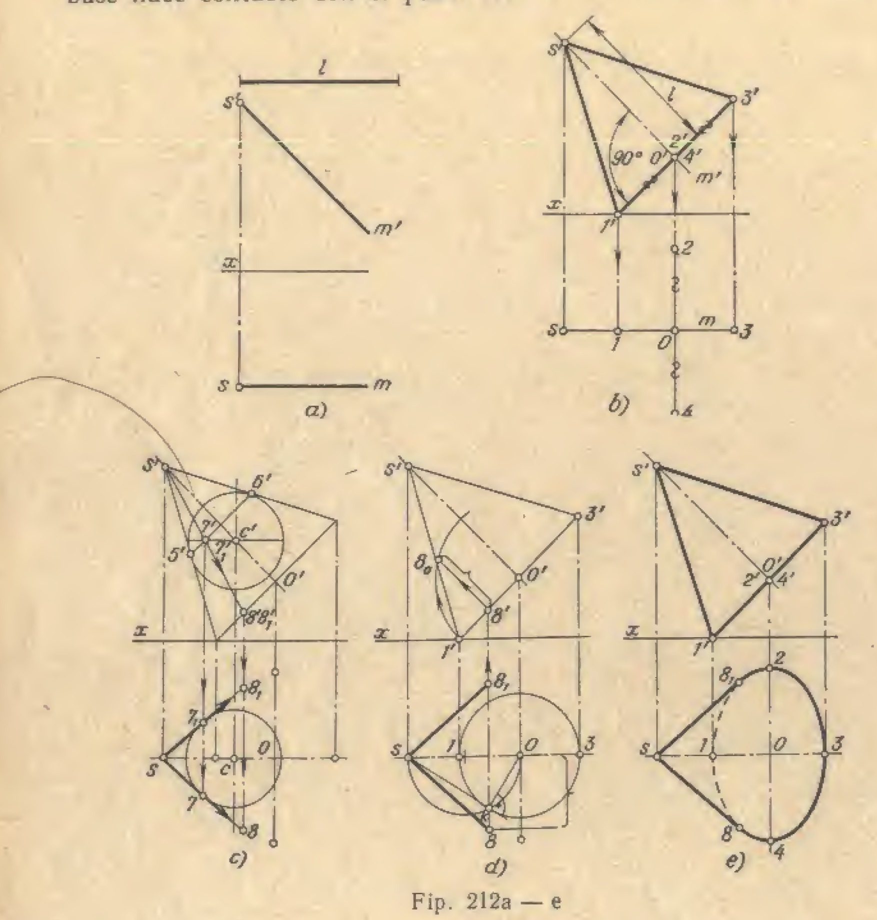


Fig. 210a, b.

Fig. 211.

228. Hallar la línea de intersección de una superficie cónica, dada por su vértice S y su directriz AB, con el plano V (fig. 211).

229*. Construir las proyecciones de un cono circular recto, cuyo eje se encuentra sobre la recta *SM* (*SM* es paralela al plano *V*) (fig. 212, *a*). La altura del cono es igual a *l*, la circunferencia de la base hace contacto con el plano *H*.



Fip. 212a — e

Solución. Puesto que en el caso dado la recta *SM* es paralela al plano *V*, se puede llevar sobre *s'm'* (fig. 212, *b*) el segmento *s'O'* igual a *l*. El punto (*O'*, *O*) es el centro de la circunferencia de la base. Esta circunferencia se proyecta sobre el plano *V* en forma de segmento de una recta. Por eso, trazando por el punto *O'* una recta perpendicular a *s'O'* obtenemos el punto *1'*, el radio de la base *O'1'* y el diámetro entero de la base *1'3'*.

El punto (*1'*, *1*) es el punto de contacto de la base del cono con el plano *H*. La proyección frontal del cono es el triángulo *1's'3'*. Sobre el plano *H*, la circunferencia de la base se proyecta en forma de una elipse, cuyo eje mayor *2—4* es igual al segmento *1'3'*, y el eje menor es igual a *1—3*.

Para construir el contorno de la proyección horizontal del cono hay que hallar aquellas de sus generatrices, cuyas proyecciones horizontales hacen contacto con la elipse, es decir, que son las más extremas si se mira al cono desde arriba. En la fig. 212, *c* se muestra una esfera inscrita en el cono; esta esfera hace contacto con el cono

según una circunferencia, cuya proyección frontal es *5'6'*. Los puntos *7* y 7_1 de esta circunferencia pertenecen también al ecuador de la esfera incsrita. Las generatrices buscadas pasan por los puntos *7* y 7_1 y cortan a la circunferencia de la base en los puntos *8* y 8_1.

Las proyecciones horizontales *s—7* y $s—7_1$ de estas generatrices hacen contacto con la elipse, construida (fig. 212, *e*) según los ejes *2—4* y *1—3*, en los puntos *8* y 8_1.

El contorno de la proyección horizontal del cono está compuesto por las rectas *s—8* y $s—8_1$ y la parte de la elipse $8—2—3—4—8_1$.

Las tangentes a la elipse en el punto *s*, se pueden trazar también así como se muestra en la fig. 212, *d*: primero se traza por el punto *s* una tangente a la circunferencia, construida con el eje menor de la elipse como diámetro, se obtiene el punto *k* y con su ayuda, el punto *8'*. Girando la circunferencia de la base del cono hasta situarla paralelamente al plano *V* (en la fig. 212, *d* viene dada sólo una parte de esta circunferencia, descrita desde el punto *O'* con radio igual *a O'1'*), obtenemos el punto 8_0 y la semicuerda $8'8_0$. Trazando, a partir de la recta *sO*, hacia arriba y hacia abajo un segmento igual a esta semicuerda, obtenemos los puntos *8* y 8_1, que son los puntos de contacto de las generatrices de contorno con la elipse. La elipse deberá pasar por estos puntos.

230. Construir las proyecciones de un cono circular recto, si el punto *S* es el vértice del cono y el punto *O* es el centro de la circunferencia de su base; esta circunferencia hace contacto con uno de sus puntos con el plano *V* (fig. 213).

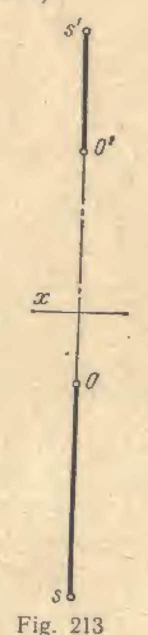


Fig. 213

231*. Construir las proyecciones de un cono circular recto, cuya base debe encontrarse en el plano *P* (fig. 214, *a*), su vértice, en el punto *S*. El punto *A* pertenece a la circunferencia de la base del cono.

Solución. Trazamos desde el punto *S* (fig. 214, *b*) la perpendicular al plano *P* y hallamos el punto de su intersección (*O'*, *O*), que es el centro de la circunferencia de la base del cono. Abatimos (fig. 214, *c*) el plano *P* sobre el plano *H* y construimos las

Fig. 214a — c.

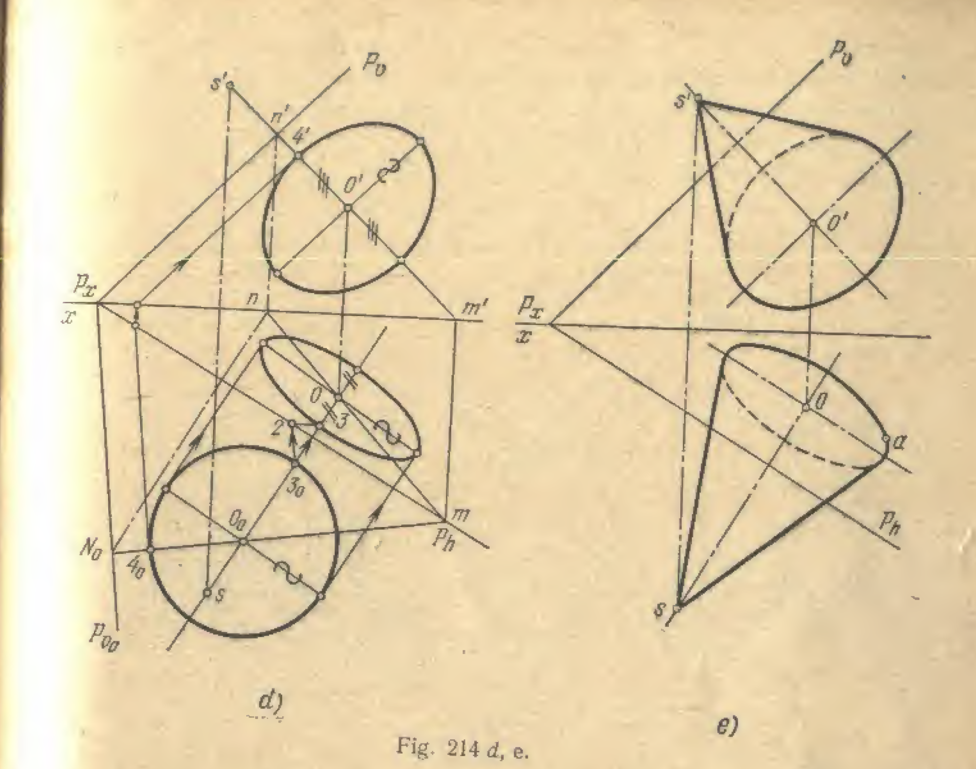


Fig. 214 *d*, e.

posiciones abatidas de los puntos O y A (O_0 y A_0). El radio de la circunferencia de la base del cono es igual a la distancia entre estos puntos.

Describimos con centro en el punto O_0 la circunferencia de la base y con su ayuda construimos (fig. 214, *d*) las elipses, en las que esta circunferencia se proyecta sobre los planos H y V (véase el problema 189).

Trazando por los puntos s' y s tangentes a las elipses correspondientes, obtenemos las proyecciones buscadas del cono (fig. 214, *e*).

232. Construir las proyecciones de un cono circular recto, cuyo eje se encuentra sobre la recta SM, y el punto A pertenece a la circunferencia de su base (fig. 215). Emplear en la resolución de este problema el método de abatimiento.

233*. Construir las proyecciones de un cono circular recto, si su eje pasa por el punto I (fig. 216, *a*), su base está situada sobre el plano dado por las rectas paralelas AB y CD, y el plano dado por el triángulo EFG tiene contacto con este cono.

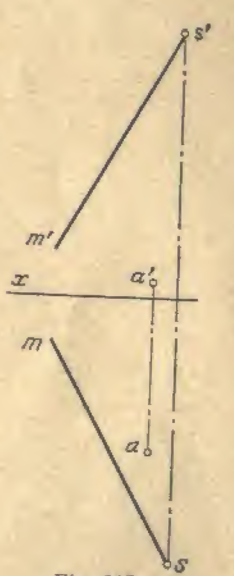


Fig. 215.

Solución. En la fig. 216, *b* se muestra que el cono buscado está encerrado en el ángulo diedro formado por el plano de la base (éste viene dado por las rectas paralelas *AB* y *CD*) y el plano tangente (dado por el triángulo *EFG*). El eje del cono, trazado por el punto *I* perpendicularmente al plano de la base, determina, en la intersección con este plano, el centro de la base (el punto *O*), y en la intersección con el plano tangente, el vértice del cono (el punto *S*). Al mismo tiempo se determinará el radio de la base *OK*. Es evidente, que hay que hallar la recta por la que se cortan el

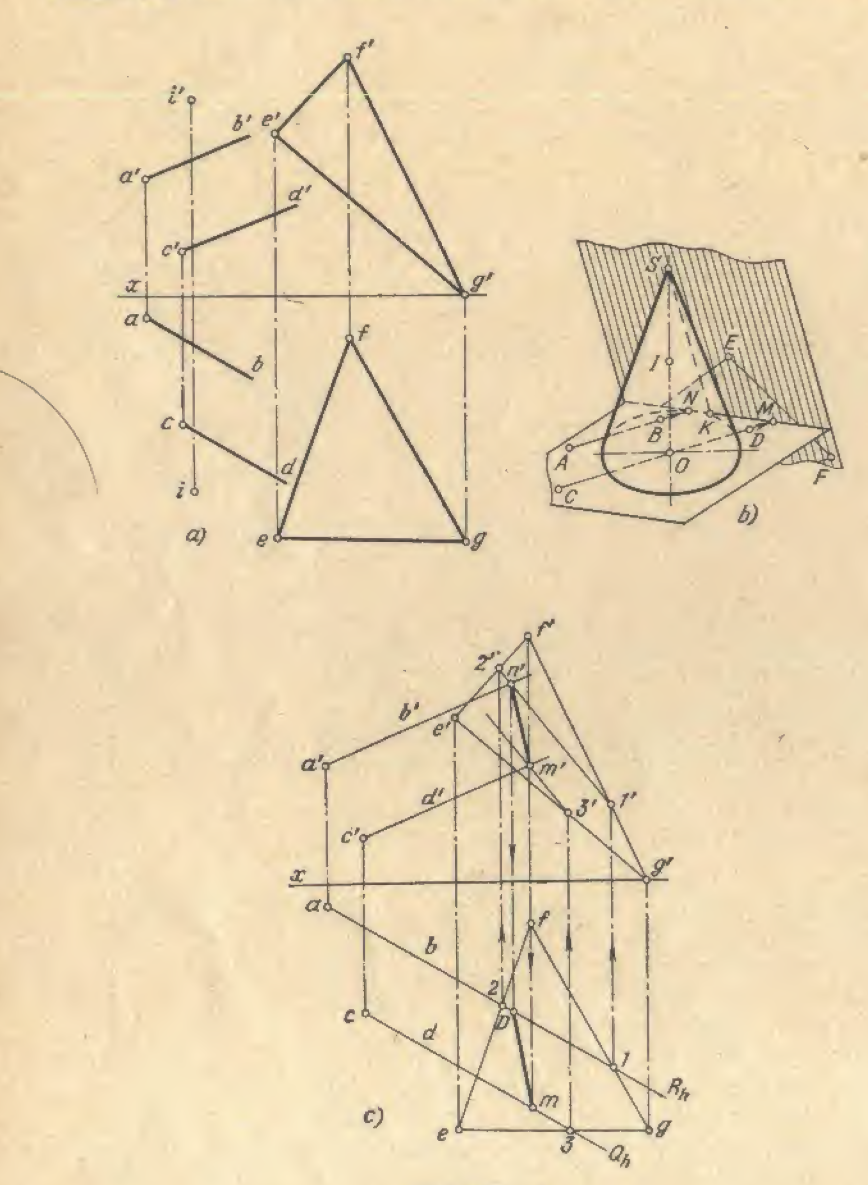


Fig. 216a — c.

plano de la base del cono y el plano tangente al cono. Esta recta es la *MN*. Si se introduce un plano auxiliar de proyección de modo tal, que se sitúe perpendicularmente a la recta *MN*, entonces, en el dibujo obtenido se revelarán en seguida los puntos *O* y *S* y el radio de la circunferencia de la base del cono.

Ahora bien, comenzamos por la construcción de la línea de intersección del plano de la base del cono el plano tangente al cono (fig. 216, *c*). Esto se hace hallando los puntos de intersección de las rectas *AB* y *CD* con el plano del triángulo *EFG*. Por *AB* y *CD* se han trazado los planos proyectantes horizontales auxiliares *R* y *Q*.

Ahora (fig. 216, *d*) introduciendo sucesivamente los planos auxiliares de proyección *U*, perpendicular al plano *V* y paralelo a *MN*, y *T*, perpendicular al plano *U* y

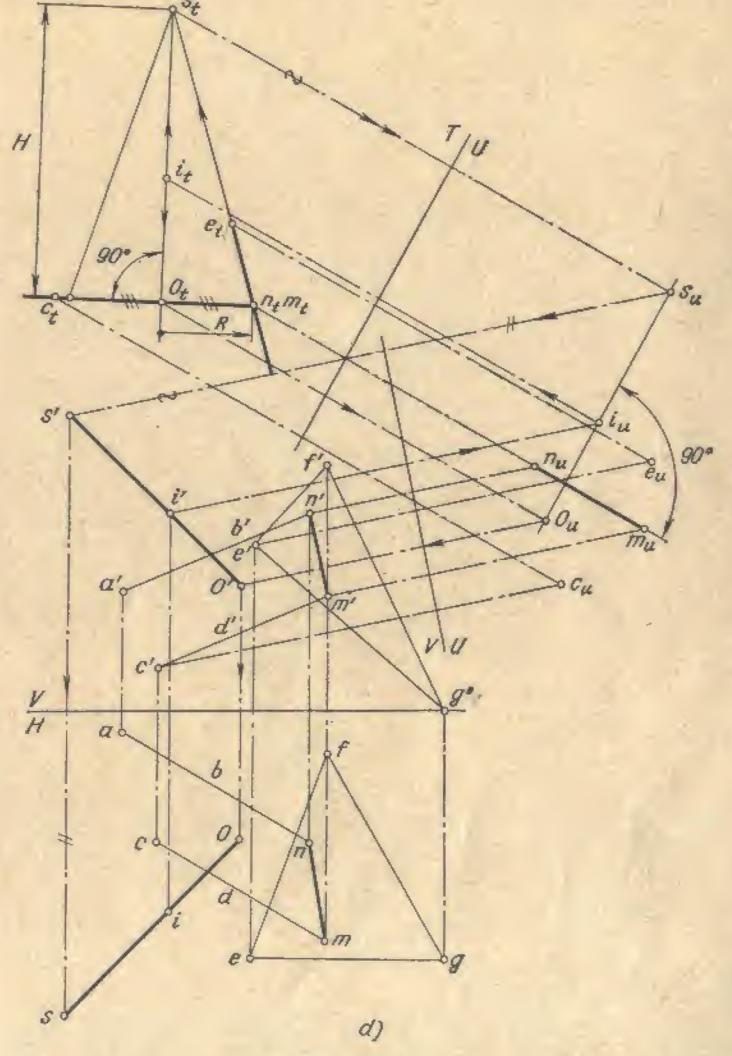


Fig. 216d.

a la recta MN, se puede obtener un dibujo, en el que ambos planos (el de la base y el tangente al cono) vienen representados en forma de rectas. Trazando en este dibujo por el punto i_t la proyección de la altura del cono perpendicularmente al plano de su base, obtenemos la proyección O_t del centro de la base y s_t, que es la proyección del vértice del cono. Obtenemos también el segmento $O_t m_t$ igual al radio de la circunferencia de la base.

Una vez obtenidas (fig. 216, *d*) las proyecciones $s'O'$ y sO, pasamos a la etapa final de la construcción (fig. 216, *e*), es decir, a la obtención del dibujo del cono.

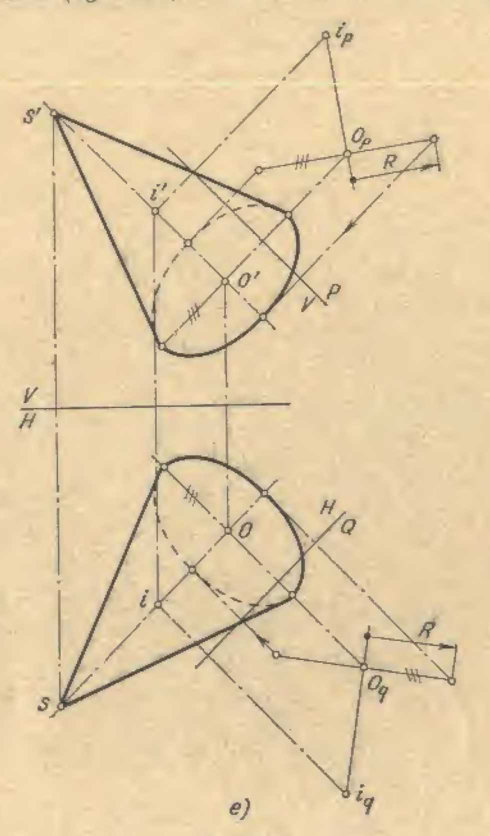


Fig. 216e.

234. Construir las proyecciones de un cono circular recto, si (fig. 217) el punto O es la proyección horizontal del centro de la base, situado sobre el plano P, y el plano dado por las rectas AB y CD hace contacto con la superficie del cono buscado.

235*. Están dados (fig. 218, *a*) los puntos: O (el centro de una esfera) y A (un punto sobre la superficie de esta esfera). Construir las proyecciones de la esfera.

Solución. El radio de la esfera buscada se expresa por el segmento con las proyecciones $O'a'$ y Oa (fig. 218, *b*). Determinamos la magnitud verdadera R de este segmento y trazamos desde los puntos O' y O circunferencias de radio R.

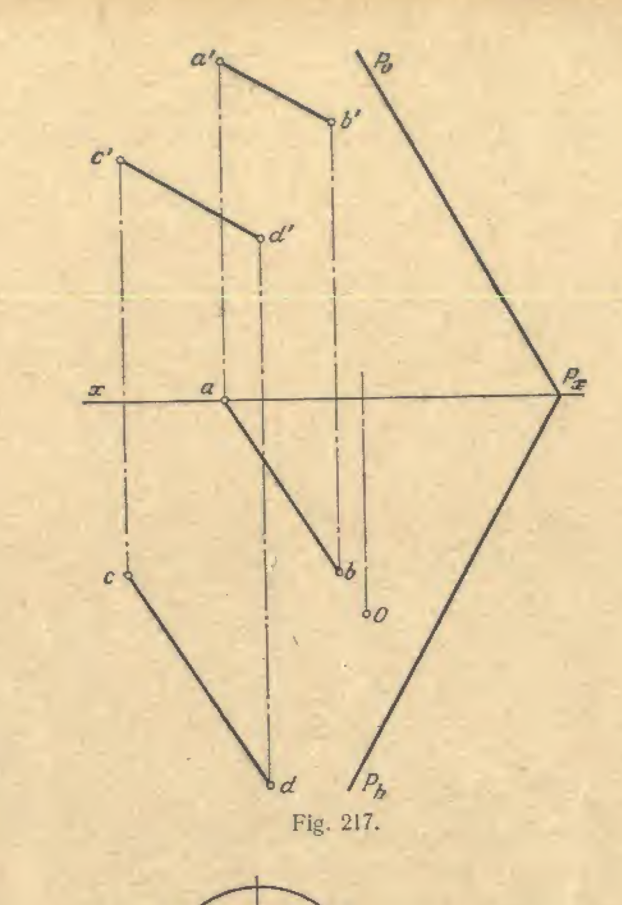


Fig. 217.

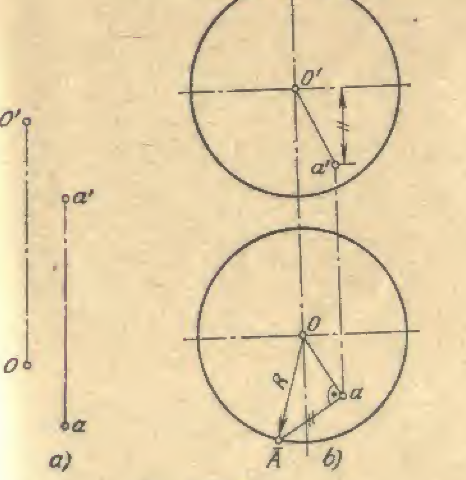


Fig. 218a, b.

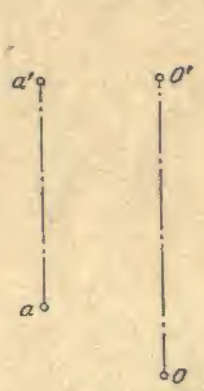


Fig. 219.

236. Construir las proyecciones de una esfera con centro en el punto O; el punto A pertenece al ecuador de la esfera (fig. 219).

237*. Construir una esfera de radio R, tangente en el punto D al plano dado por el triangulo ABC (fig. 220, *a*).

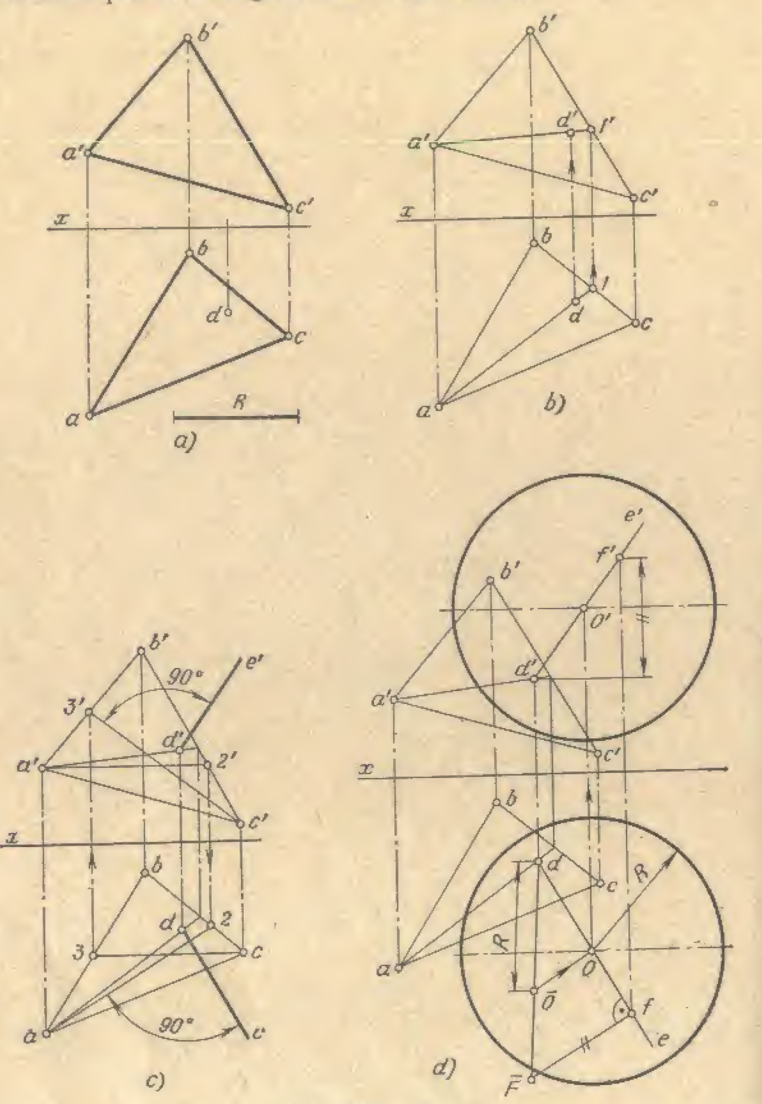


Fig. 220a — d.

Solución. El centro de la esfera debe encontrarse sobre la perpendicular trazada desde el punto D al plano del triángulo ABC. Hallada (fig. 220, *b*) la proyección *d'* trazamos en el plano del triángulo la horizontal $A—2$ y la frontal $C—3$ (fig. 220, *c*), utilizándolas para la construcción de las proyecciones *de* y *d'e'* de la perpendicular a este plano.

Ahora hay que llevar sobre la recta DE, a partir del punto D, un segmento igual a R. Tomando cierto segmento DF (fig. 220, *d*), hallamos su verdadera magnitud $D\bar{F}$, llevamos sobre $D\bar{F}$ un segmento igual a R, y obtenemos primeramente la proyección O, y con ayuda de ésta, la O'. Queda trazar desde los puntos O y O' circunferencias de radio R. Viene representada sólo una esfera, a un lado del plano. Si a partir de los puntos *d* y *d'* llevamos sobre las prolongaciones de las rectas *de* y *d'e'* los segmentos $dO_1=dO$ y $d'O_1'=d'O'$ (estas construcciones no se muestran en el dibujo), entonces el punto O_1 será el centro de la segunda esfera con el mismo radio R, tangente al plano del triángulo ABC en el punto D.

238. Construir una esfera tangente al plano dado por el triángulo ABC (fig. 221), si el centro de gravedad del área del triángulo es el punto de tangencia, y el radio de la esfera es igual a la mitad del lado BC.

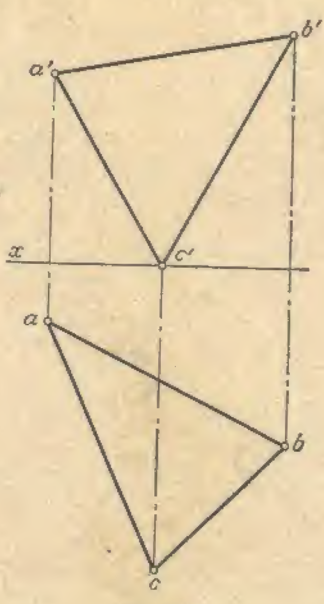


Fig. 221.

239*. Construir una esfera con centro sobre la recta AB (fig. 222, *a*), tangente a los planos dados por los triángulos MNC y MND.

Solución. El lugar geométrico de los centros de las esferas tangentes a los planos dados P y Q (fig. 222, *b*) es el plano (U) que pasa por la línea de intersección MN de estos planos, y que divide al ángulo diedro formado por los planos por la mitad.

El centro de la esfera buscada (el punto O) se encuentra en el punto de intersección del plano U con la recta AB. El radio R de la esfera es igual a la distancia desde el punto O hasta cualquiera de los planos dados.

Todo esto es fácil de obtener empleando el método de cambio de los planos de proyección (fig. 222, *c*). El primer plano auxiliar de proyección (S) lo introducimos de tal manera que sea perpendicular al plano H y paralelo a la arista MN del ángulo diedro, y luego introducimos el segundo plano auxiliar T perpendicularmente al plano S y a la misma arista MN. Una vez obtenida la proyección del ángulo diedro en forma del ángulo $c_tm_td_t$ trazamos su bisectriz, que representa el plano U, y hallamos el punto O_t y el segmento $O_tk_t=R$. Lo demás está claro del dibujo.

236. Construir las proyecciones de una esfera con centro en el punto O; el punto A pertenece al ecuador de la esfera (fig. 219).

237*. Construir una esfera de radio R, tangente en el punto D al plano dado por el triangulo ABC (fig. 220, a).

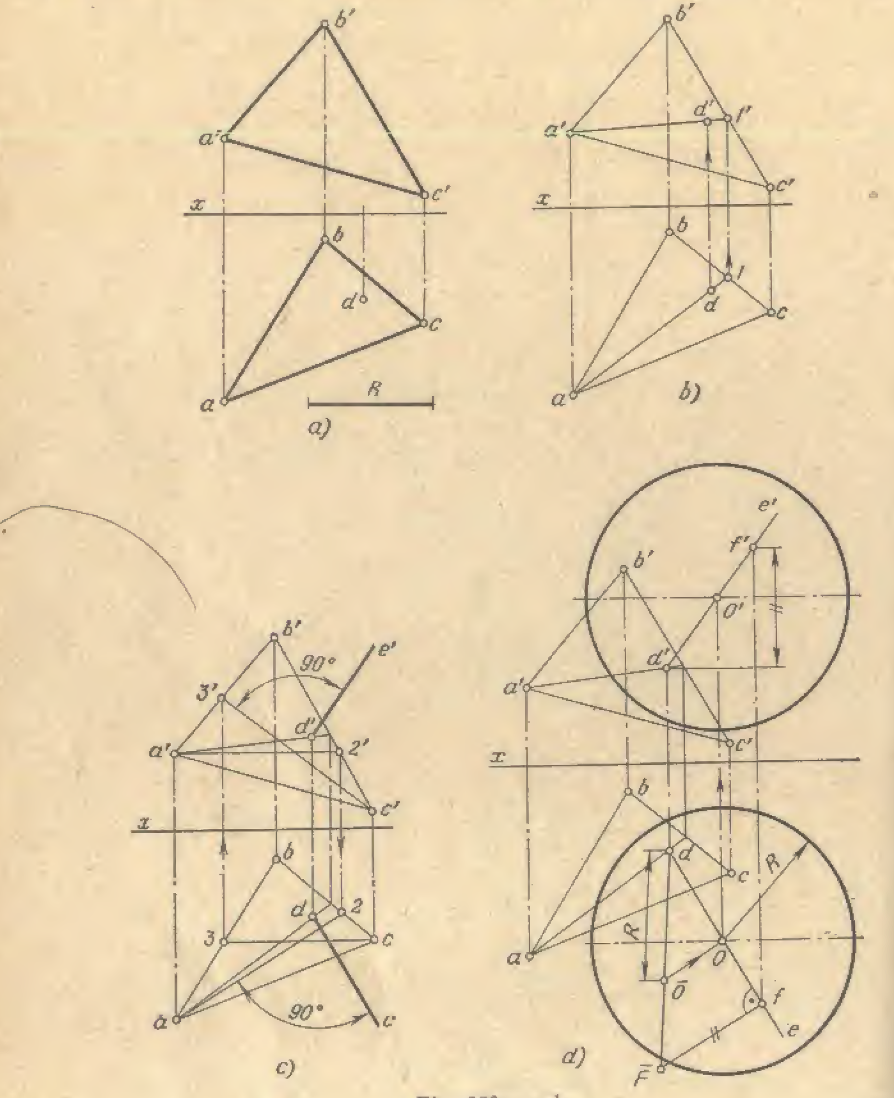


Fig. 220a — d.

Solución. El centro de la esfera debe encontrarse sobre la perpendicular trazada desde el punto D al plano del triángulo ABC. Hallada (fig. 220, b) la proyección d' trazamos en el plano del triángulo la horizontal A—2 y la frontal C—3 (fig. 220, c), utilizándolas para la construcción de las proyecciones de y $d'e'$ de la perpendicular a este plano.

Ahora hay que llevar sobre la recta DE, a partir del punto D, un segmento igual a R. Tomando cierto segmento DF (fig. 220, d), hallamos su verdadera magnitud $D\bar{F}$, llevamos sobre $D\bar{F}$ un segmento igual a R, y obtenemos primeramente la proyección O, y con ayuda de ésta, la O'. Queda trazar desde los puntos O y O' circunferencias de radio R. Viene representada sólo una esfera, a un lado del plano. Si a partir de los puntos d y d' llevamos sobre las prolongaciones de las rectas de y $d'e'$ los segmentos $dO_1=dO$ y $d'O_1'=d'O'$ (estas construcciones no se muestran en el dibujo), entonces el punto O_1 será el centro de la segunda esfera con el mismo radio R, tangente al plano del triángulo ABC en el punto D.

238. Construir una esfera tangente al plano dado por el triángulo ABC (fig. 221), si el centro de gravedad del área del triángulo es el punto de tangencia, y el radio de la esfera es igual a la mitad del lado BC.

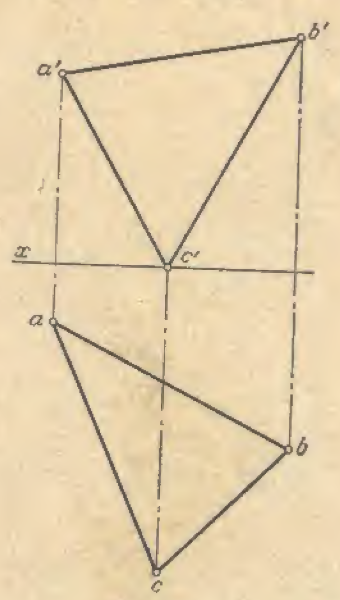


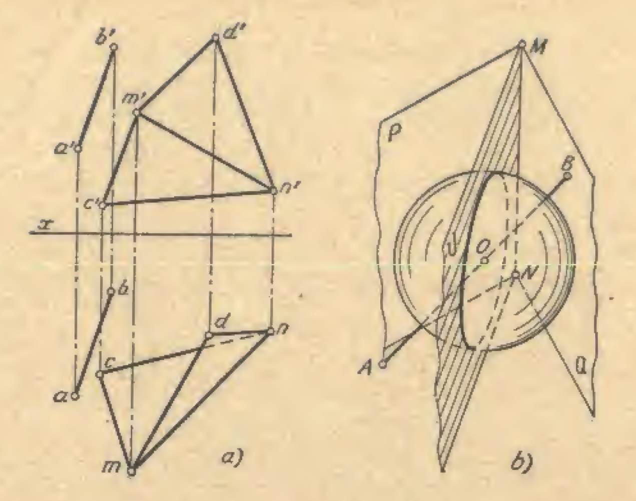
Fig. 221.

239*. Construir una esfera con centro sobre la recta AB (fig. 222, a), tangente a los planos dados por los triángulos MNC y MND.

Solución. El lugar geométrico de los centros de las esferas tangentes a los planos dados P y Q (fig. 222, b) es el plano (U) que pasa por la línea de intersección MN de estos planos, y que divide al ángulo diedro formado por los planos por la mitad.

El centro de la esfera buscada (el punto O) se encuentra en el punto de intersección del plano U con la recta AB. El radio R de la esfera es igual a la distancia desde el punto O hasta cualquiera de los planos dados.

Todo esto es fácil de obtener empleando el método de cambio de los planos de proyección (fig. 222, c). El primer plano auxiliar de proyección (S) lo introducimos de tal manera que sea perpendicular al plano H y paralelo a la arista MN del ángulo diedro, y luego introducimos el segundo plano auxiliar T perpendicularmente al plano S y a la misma arista MN. Una vez obtenida la proyección del ángulo diedro en forma del ángulo $c_tm_td_t$ trazamos su bisectriz, que representa el plano U, y hallamos el punto O_t y el segmento $O_tk_t=R$. Lo demás está claro del dibujo.



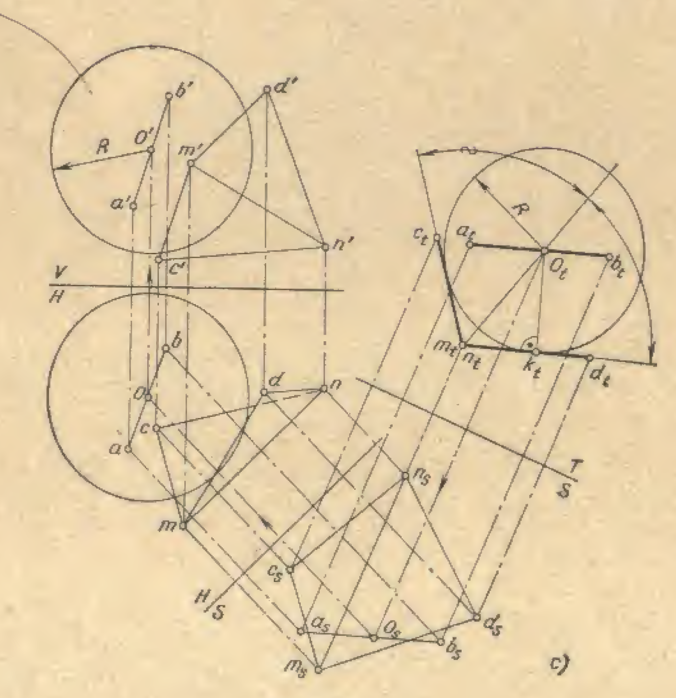


Fig. 222a — c.

240. Construir una esfera, tangente a las caras ABC y SAB de la pirámide $SABC$ (fig. 223), tomando su centro sobre la arista SC.

241*. Trazar por la recta AB un plano tangente a la esfera dada (fig. 224, *a*).

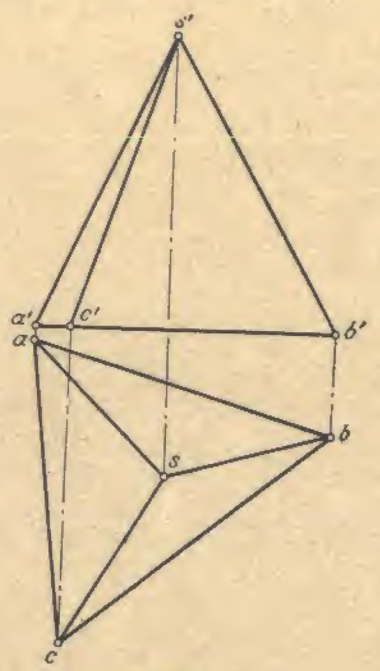


Fig. 223.

Solución. Representándonos el cuadro espacial (fig. 224, *b*), se puede ver que la esfera es tangente a dos planos que forman un ángulo diedro con la arista AB. De aquí se desprende el plan de resolución siguiente: a) empleando el método de cambio de los planos de proyección, situar el plano auxiliar T perpendicularmente a AB, b) obtener sobre este plano T la proyección de la esfera, c) trazar desde el punto (la proyección de AB sobre el plano T) dos tangentes a la circunferencia, que representa la proyección de la esfera sobre el plano T. Estas tangentes pueden ser consideradas como las proyecciones de los planos tangentes a la esfera (ellos son perpendiculares al plano T), y al mismo tiempo como las proyecciones de dos rectas trazadas desde cierto punto de la recta AB tangentes a la esfera. Obviamente, la recta AB y cada una de estas tangentes determinan un plano que pasa por AB y que es tangente a la esfera. Si destacamos los puntos de tangencia M y N (fig. 224, *b*), entonces cada uno de los planos tangentes será expresado por la recta AB y el punto de tangencia (M o N).

En la fig. 224, *c* se muestra la construcción de las proyecciones de la recta AB y de la esfera sobre el plano T y las proyecciones m_t y n_t de los puntos de tangencia en las rectas trazadas desde el punto $a_t(b_t)$ tangentes a la circunferencia con centro c_t. En la fig. 224, *d* se muestra la fase final de la construcción: trazando por el punto c_s una recta paralela al eje T/S, obtenemos sobre esta recta las proyecciones m_s y n_s, y también el punto k_s, que es la proyección del punto K perteneciente a la recta AB; por el punto K se han trazado las tangentes KM y KN a la esfera.

Lo demás está claro del dibujo.

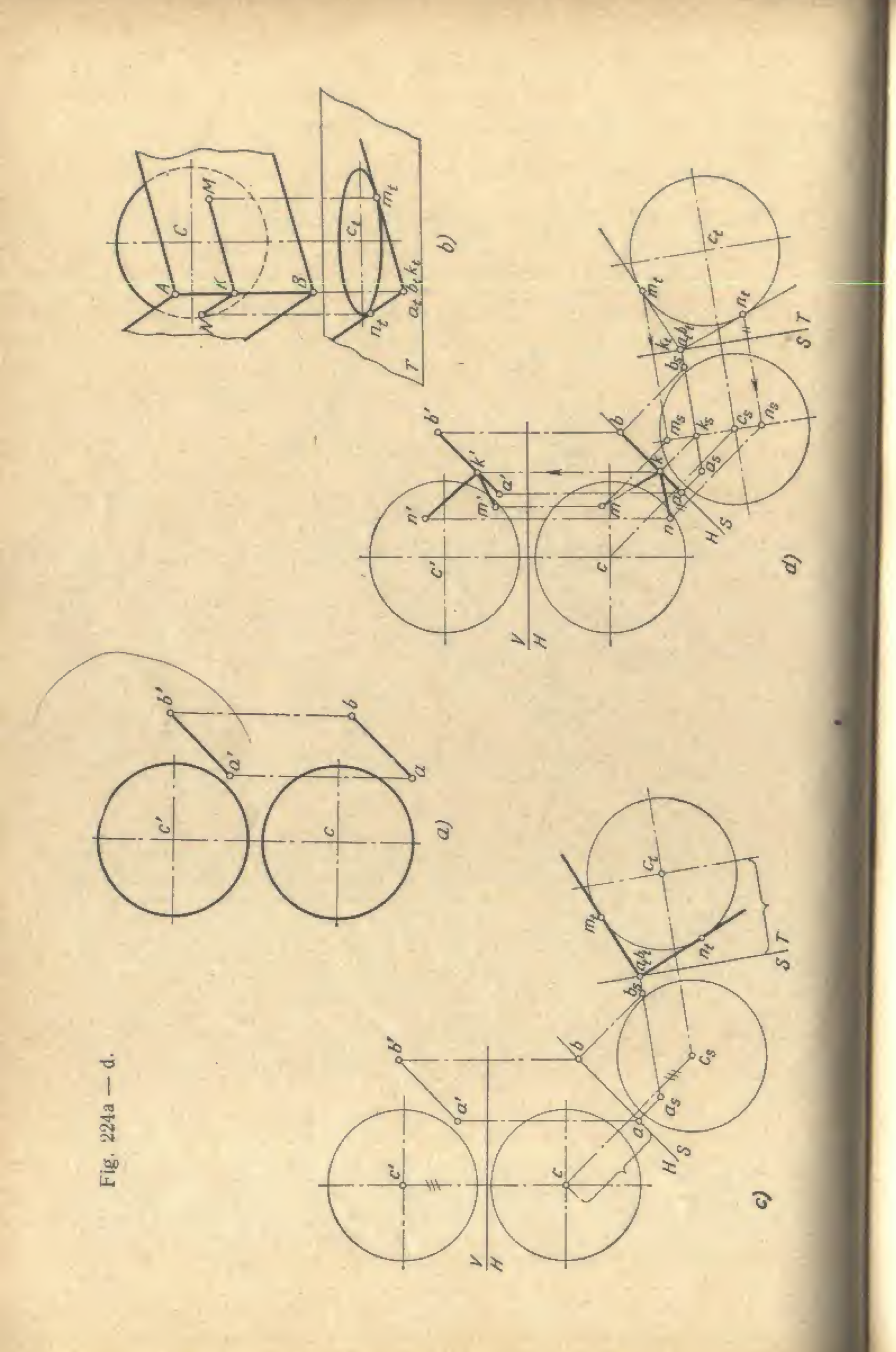


Fig. 224a — d.

242*. Construir las proyecciones de un cuerpo de revolución, delimitado por la superficie de un toro y dos círculos (bases), cuyos planos son perpendiculares al eje de este cuerpo; el eje está dado por la recta MN (MN es paralela al plano V, fig. 225, *a*). Los puntos A, B y C pertenecen a la superficie del cuerpo, con la particularidad de que el punto A está situado sobre la circunferencia de una de las bases, y el punto C, sobre la circunferencia de la otra base.

Solución. Dado que el eje del cuerpo es paralelo al plano V, el contorno de su proyección frontal será el meridiano principal del cuerpo. Trazando por a' y c' (fig. 225, *b*) rectas perpendiculares a $m'n'$, obtendremos las proyecciones frontales de los planos de las bases del cuerpo, e introduciendo el plano auxiliar S, perpendicular al plano V y a la recta MN, obtendremos la imagen verdadera de ambas bases (los círculos de radios m_sc_s y m_sa_s). El plano S se ha tomado coincidente con el plano de la base menor. Se ha construido también el paralelo sobre el cual está situado el punto dado B.

Con ayuda de los puntos c_{1s}, a_{1s} y b_{1s} hallamos los puntos c_1', a_1' y b_1'. Por estos puntos deberá pasar el arco de circunferencia, que es la proyección frontal de la generatriz del toro en su posición extrema (fig. 225, *c*). Trazando este arco y otro simétrico a éste respecto del eje $m'n'$, obtendremos la proyección frontal del cuerpo de revolución. Para su proyección horizontal construimos las elipses que representan las proyecciones de las bases.

Para obtener la proyección horizontal completa, hay que construir su contorno (fig. 225, *d*). Para ello recurrimos a la ayuda de una serie de esferas inscriptibles en el cuerpo de revolución.

Estas esferas hacen contacto con la superficie del cuerpo según circunferencias, cuyas proyecciones frontales son segmentos de rectas perpendiculares a $m'n'$. En la intersección de las circunferencias de tangencia con los ecuadores de las esferas hallamos los puntos *7*, *6*, *1*, *2* y otros del contorno de la proyección horizontal.

Por ejemplo, tomando el centro de la esfera en el punto F, trazamos la recta $f'O$, determinamos el punto de tangencia del contorno de la esfera con el contorno del toro, trazamos la proyección de la circunferencia de tangencia, perpendicularmente a $m'n'$, y hallamos el punto $6'$ de intersección de dicha proyección con la proyección del ecuador de la esfera. Trazando desde el punto f una circunferencia (la proyección horizontal del ecuador) hallamos sobre ella el punto *6*.

Procedemos análogamente tomando, por ejemplo, el centro de la esfera en el punto D; hallamos el punto ($2'$, *2*).

Por las proyecciones halladas de los puntos trazamos la curva $7'6'1'2'k'5'$ y la curva *7—6—1—2—k*, que es la línea de contorno buscada de la proyección horizontal de la superficie del toro. Las proyecciones horizontales de los puntos de la curva, situados por debajo del punto K están ocultas.

243. Construir las proyecciones de un cuerpo de revolución delimitado por la superficie de un toro y dos círculos (bases), los planos de los cuales son perpendiculares al eje del cuerpo de revolución; el eje está dado por la recta MN (MN es paralela al plano H, fig. 226). Los puntos A, B y C pertenecen a la superficie del cuerpo, con la particularidad de que el punto A se encuentra sobre la circunferencia de una de las bases, y el punto C sobre la circunferencia de la otra.

244*. Construir las proyecciones de un cuerpo de revolución delimitado por la superficie de un toro y un círculo (base) cuyo plano es perpendicular al eje de este cuerpo. En el punto S (fig. 227, *a*) se encuentra el vértice del cuerpo, su base está situada sobre el plano dado por el triángulo AMN. El radio de la base del cuerpo es igual a R.

Fig. 225a — d.

El plano dado por el triángulo BMN es tangente a la superficie del cuerpo de revolución.



Fig. 226.

Solución. Es fácil de imaginarse tal posición de los elementos dados respecto a cierto plano de proyección, en la que el ángulo diedro entre los planos y la arista MN se representará en forma de un ángulo cuyos lados son las proyecciones de los triángulos dados; la perpendicular trazada desde la proyección del vértice S al lado correspondiente del ángulo, determinará la altura del cuerpo de revolución y el centro del círculo de la base. En efecto, empleando el métodó de cambio de los planos de proyección (fig. 227, *b*), obtenemos la configuración correspondiente en la proyección sobre el plano auxiliar T. La generatriz del cuerpo de revolución deberá representarse sobre este plano como el arco de una circunferencia que pasa por los puntos s_t y c_t (el punto c_t deberá estar situado sobre la recta m_tO_t a la distancia R del punto O_t) y que es tangente a la recta m_tb_t.

En la fig. 227, *c* se muestra la construcción de este arco. Por los puntos s_t y c_t se ha trazado una recta hasta su intersección con la recta m_tb_t en el punto *1*. El segmento s_t *1* se ha dividido por la mitad, y desde el punto *2* como centro se ha descrito una circunferencia (se muestra la mitad) de radio s_t *2*. Desde el punto c_t se ha trazado la perpendicular a s_tc_t hasta su intersección con la circunferencia en el punto *3*. Describiendo un arco de radio *1—3*, obtenemos sobre la recta m_tb_t el punto *4*. Ahora, trazando desde el punto *4* la perpendicular a la recta m_tb_t y al segmento s_tc_t en su punto medio, hallamos el punto *5*, que es el centro del arco que pasa por los puntos s_t y c_t y que es tangente en el punto *4* a la recta m_tb_t.

Así pues, en la fig. 227, *b* y *c* obtenemos la altura del cuerpo de revolución, la magnitud verdadera del radio del arco que da el contorno de su meridiano, y las proyecciones O' y O del centro de la base.

Fig. 227a — c.

Ahora pasamos a la construcción de las proyecciones del cuerpo de revolución sobre los planos *V* y *H* (fig. 227, *d*). Nos valemos del método de cambio de los planos de proyección. Primero introducimos el plano auxiliar *P* perpendicularmente al plano *H* y paralelamente al eje del cuerpo de revolución: trazamos el eje *P/H* paralelamente a *sO*. Construida la recta s_pO_p, trazamos por el punto O_p una recta perpendicular a s_pO_p y obtenemos sobre el plano *P* la proyección de la base en forma del segmento de una recta, igual a 2*R*, y con su ayuda obtenemos la proyección sobre el plano *H* en forma de una elipse. La proyección del cuerpo sobre el plano *P* está contorneada por arcos de radio, cuya magnitud se ha obtenido en la fig. 227, *c*.

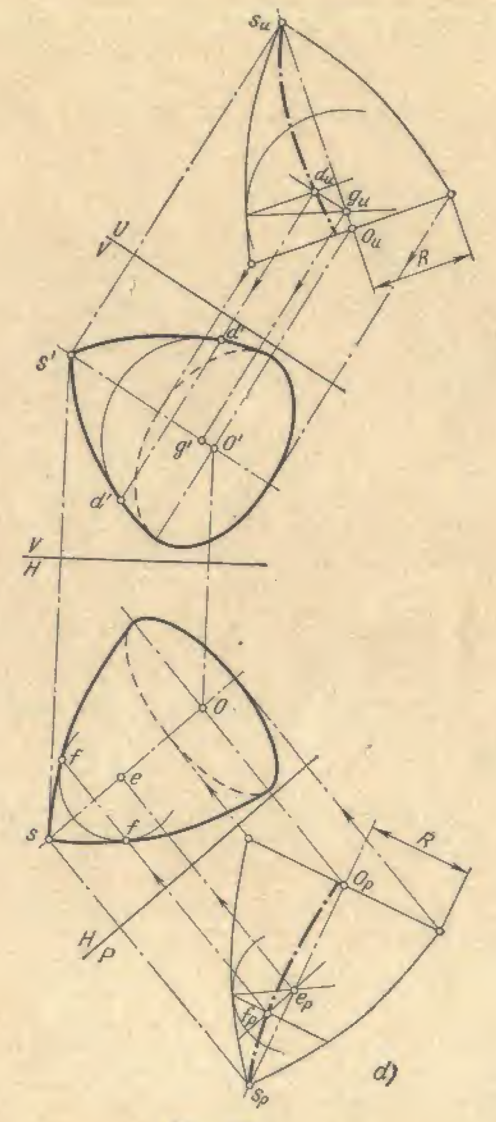


Fig. 227d.

Valiéndonos de la representación sobre el plano P, hallamos el contorno de la proyección horizontal con auxilio de esferas inscritas (semejantemente al caso examinado en el problema 242, fig. 225, d). Por ejemplo, tomando las proyecciones de la esfera con los centros e_p y e, obtenemos el punto f para el contorno de la proyección del cuerpo de revolución.

Procedemos análogamente también para construir la proyección frontal del cuerpo, introduciendo el plano auxiliar U.

245. Construir las proyecciones de un cuerpo de revolución, delimitado por la superficie de un toro y dos círculos situados en planos perpendiculares al eje del cuerpo de revolución, si viene dado: a) el punto O_1, que es la proyección horizontal del centro de la base, situada en el plano P y cuyo radio es R_1; b) el radio R_2 de la otra base; c) la distancia h entre las bases; d) el plano Q tangente a la superficie del toro (fig. 228).

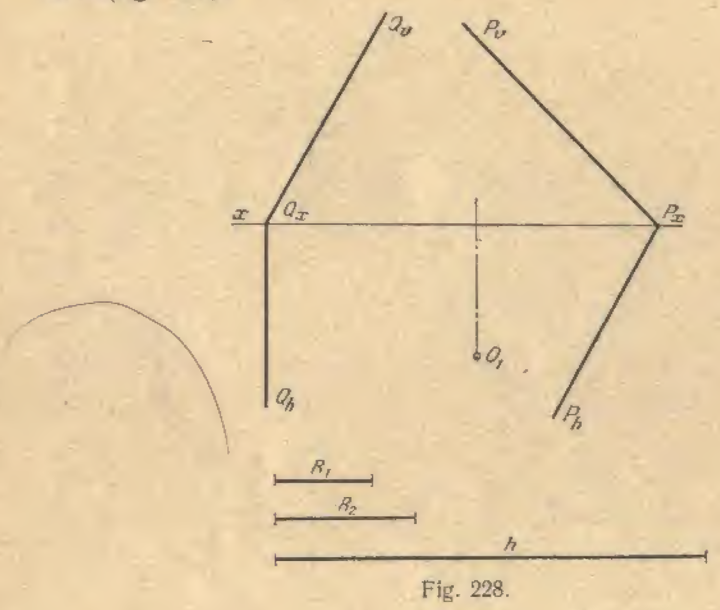


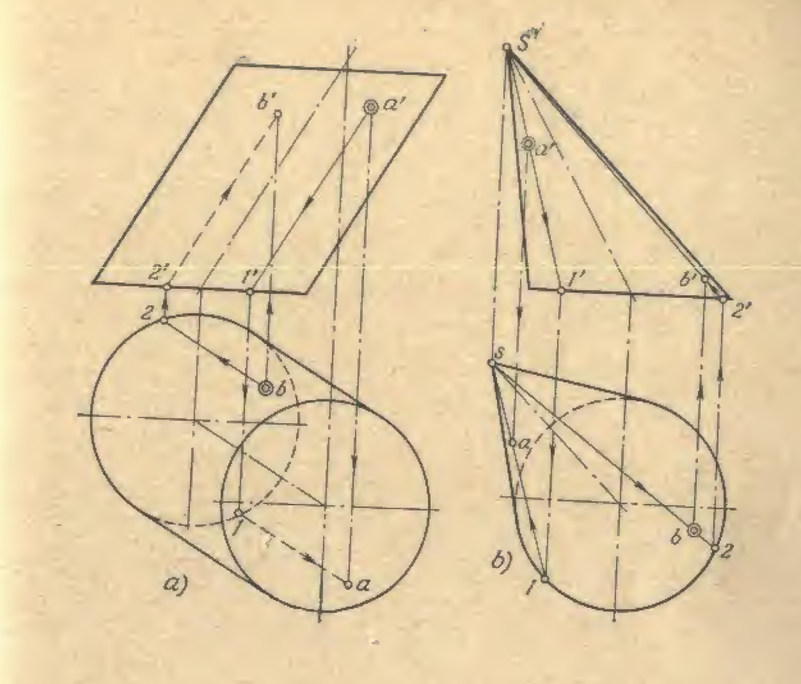
Fig. 228.

246*. Con ayuda de la proyección dada de un punto perteneciente a la superficie representada en el dibujo, hallar la otra proyección del punto.

Solución. En la resolución de este problema se ha empleado el procedimiento general, consistente en referir el punto que se examina a cierta línea perteneciente a ciencia cierta a la superficie.

En la fig. 229, a, con ayuda de las proyecciones dadas a' y b de los puntos pertenecientes a la superficie cilíndrica, había que hallar las proyecciones a y b'. La construcción se ha efectuado con auxilio de las generatrices $A—1$ y $B—2$. En la fig. 229, b también se han empleado las generatrices de la superficie cónica $S—1$, para hallar la proyección a del punto con ayuda de la proyección dada a'' y $S—2$, para hallar la proyección b' del punto con auxilio de la proyección dada b.

En la fig. 229, c, con ayuda de la proyección dada a' de un punto perteneciente a la esfera, se han hallado las proyecciones a y a''. Se ha trazado la proyección hori-



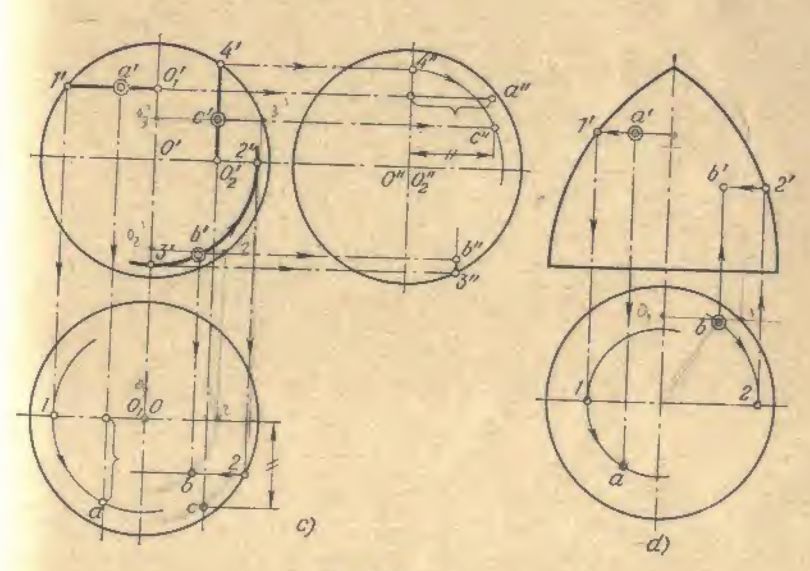
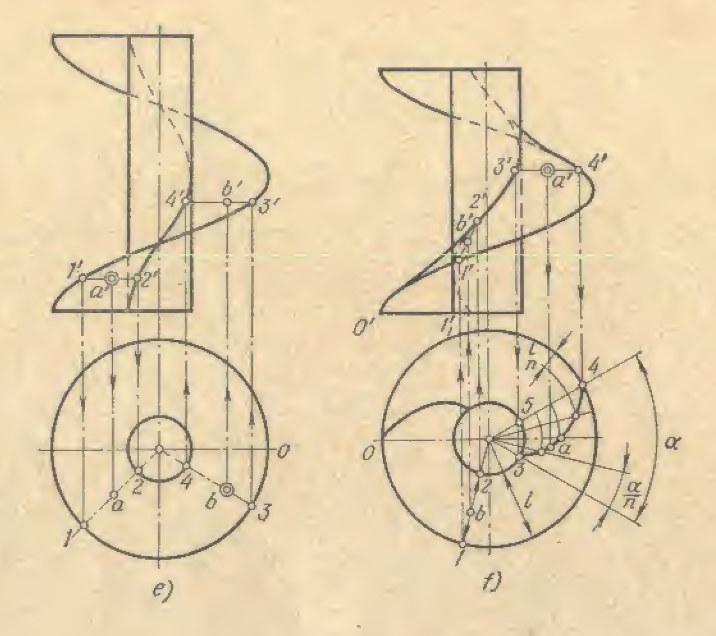


Fig. 229a — 1.



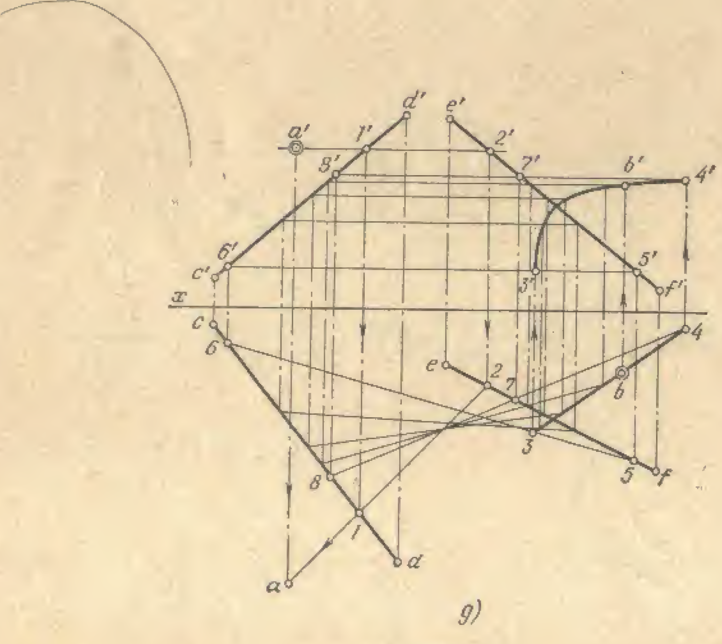


Fig. 229e — g.

zontal del paralelo tomado al nivel del punto A (la circunferencia de radio $O_1'1'$). Lo demás está claro del dibujo.

En la misma fig. 229, c se muestra que se puede, por ejemplo, construir la proyección b del punto B, perteneciente a la esfera, con ayuda de la proyección dada b' de manera distinta a como se ha hecho para el punto A, a saber: imaginarse la sección de la esfera por un plano, paralelo al plano V, según una circunferencia de radio $O'b'$, hallar la posición de la proyección horizontal de esta circunferencia y sobre ella tomar la proyección b. La proyección b'' puede ser hallada construyendo la proyección de perfil de la circunferencia de radio $O'b'$.

Nos podíamos haber imaginado un plano, que pasa por el punto dado paralelamente al plano W. Esto se muestra en la fig. 229, c en el ejemplo de la determinación de las proyecciones c'' y c del punto C auxiliándose de la proyección dada c'. El plano paralelo al plano W cortará a la esfera según una circunferencia de radio $O_2'4' = O_2''4''$. Sobre la proyección de perfil de esta circunferencia hallamos la proyección c''. Luego hallamos la proyección c.

Todas las construcciones en la fig. 229, c se han cumplido suponiendo que los puntos A, B y C vienen dados en la parte de la esfera vista en el plano V.

En la fig. 229, d, con ayuda de las proyecciones dadas a y b' se han hallado las proyecciones a' y b; los puntos pertenecen a la superficie del toro. Se han empleado los paralelos de la superficie.

En la fig. 229, e con auxilio de las proyecciones a' y b de los puntos A y B, pertenecientes a una superficie helicoidal recta, se han hallado las proyecciones a y b'. Esto se ha hecho refiriendo los puntos a las posiciones correspondientes de la generatriz (una línea recta). Las proyecciones horizontales de las generatrices están dirigidas radialmente, y las proyecciones frontales, perpendicularmente a la proyección frontal del eje de la superficie.

Para hallar la proyección frontal del punto B, perteneciente a una superficie helicoidal oblicua (fig. 229, f), con ayuda de su proyección horizontal b, también se ha utilizado la generatriz rectilínea de la superficie. Su proyección horizontal queda determinada por los puntos 1 y 2, con auyda de éstos se han tomado los puntos $1'$ y $2'$ en las proyecciones frontales de las líneas helicoidales, y se ha trazado la proyección $1'2'$, en la que se ha hallado el punto b'. La exactitud de la construcción (así como en la fig. 229, e) depende de la minuciosidad en la construcción de las sinusoides (las proyecciones frontales de las líneas helicoidales). Para elevar la exactitud, se puede emplear el cálculo de la elevación de los puntos a la proyección frontal en dependencia del desplazamiento angular en la proyección horizontal. Por ejemplo, el punto que engendra la línea helicoidal, en la posición 1 se ha desplazado a lo largo del eje del cilindro a una parte del paso, que corresponde a la parte de una vuelta completa alrededor del eje:

$$\frac{1_1'1'}{\text{paso}} = \frac{\widehat{01}}{360^\circ}.$$

En lo que se refiere a la determinación de la proyección horizontal del punto A con ayuda de su proyección dada a' (véase la fig. 229, f), aquí se ha empleado el corte de la superficie helicoidal oblicua por un plano perpendicular a su eje. La espiral de Arquímedes que se obtiene en este caso se representará en verdadera magnitud en la proyección horizontal. Trazando la proyección frontal de la espiral de Arquímedes (el segmento $3'4'$), hallamos las proyecciones de los puntos 3 y 4; luego dividimos el ángulo α en n partes iguales, y en el mismo número de partes iguales dividimos el segmento $5—4$, igual a l. Los puntos de la espiral se obtienen en la intersección de las correspondientes rectas y arcos, como se muestra en el dibujo. El puntó buscado a pertenece a la espiral.

En la fig. 229, g se muestra la construcción de la proyección a' del punto A y la proyección b' del punto B, pertenecientes a un plano oblicuo (a un paraboloide hiperbólico). El plano de paralelismo es el plano H. Por la proyección dada a'se ha trazado la proyección $1'2'$ de la generatriz de esta superficie ($1'2'$ es paralela al eje x), se ha construido la proyección $1—2$, sobre la cual se ha obtenido precisamente la proyección horizontal buscada del punto A.

Para hallar la proyección b' se ha trazado por el punto b la recta $3—4$, que es la proyección horizontal de cierta línea perteneciente a la superficie. Por los puntos de intersección de la recta $3—4$ con las generatrices ($5—6$, $4—8$ y otras) se han hallado los puntos para trazar la proyección frontal $3'4'$ de la curva obtenida, sobre la cual se determina la proyección buscada b'.

§ 22. INTERSECCIÓN DE UNA SUPERFICIE CON UN PLANO Y UNA RECTA

247*. Construir las proyecciones de la parte de un cilindro circular recto que queda después de cortarlo con un plano proyectante frontal P (fig. 230). Dar la forma natural de la sección y el desarrollo completo de la superficie.

Solución. Juzgando por la posición del plano secante P respecto al eje del cilindro, la línea en su superficie lateral, que se obtiene en el plano P, representa una elipse con centro en el punto O (en el eje del cilindro); el eje mayor de la elipse es igual al segmento $1'7'$, y el eje menor, al diámetro del cilindro. Teniendo en cuenta que el plano P corta también a una de las bases del cilindro, obtenemos una sección en forma de una figura delimitada por el arco de una elipse y el segmento de la recta AB. Para construir esta figura se ha empleado el método de cambio de los planos de proyección, o sea, se ha introducido el plano auxiliar S perpendicular al plano V y paralelo al plano P. La construcción se podía haber realizado sin introducir el plano S y los ejes V/H y S/V, sino que haciendo uso del eje mayor de la elipse para trazar a partir de él segmentos tomados en la proyección horizontal como, por ejemplo, el segmento l para obtener los puntos a_s y b_s.

La división de la circunferencia de la base, empleada en la fig. 230, en cierto número de arcos iguales entre sí (se han tomado 12 arcos) representa un procedimiento corriente para la construcción del desarrollo en casos semejantes. El desarrollo completo se compone de a) el desarrollo de la superficie lateral, delimitada por cinco segmentos de una línea recta y de la curva $A_0C_0B_0$ (la sinusoide en la que se desarrolla la elipse), b) la circunferencia de la base del cilindro, c) la forma verdadera de la sección, d) un segmento obtenido en la base superior.

248*. Hallar los puntos de intersección de la superficie de un cilindro con una línea recta (fig. 231, *a*).

Solución. Para la resolución de este problema empleamos el procedimiento general de la construcción de los puntos de intersección de líneas rectas con superficies cualesquiera, a saber: 1) situando la recta en cierto plano, 2) construyendo la línea de intersección de la superficie con este plano, 3) hallando los puntos de intersección de la recta dada con esta línea. En el problema en cuestión tomamos el plano auxiliar de modo tal, que corte a la superficie del cilindro según líneas rectas (las generatrices). Este es el procedimiento más sencillo para el caso dado. En la fig. 231, *b* se muestra que el plano auxiliar P se determina por la recta AB y la recta CM_2, que corta a la recta AB y que es paralela a las generatrices del cilindro. Tal plano corta al cilindro según sus generatrices.

La construcción se muestra en la fig. 231, *c*. Para determinar las generatrices según las cuales el plano trazado por AB corta al cilindro, se han construido las trazas horizontales de la recta AB (el punto m_1', m_1) y de la recta CM_2 (el punto m_2', m_2). Por las trazas de las rectas se ha trazado la traza horizontal del plano (la recta m_1m_2). Esta traza corta en los puntos 1 y 2 a la circunferencia que representa la traza de la superficie cilíndrica en el mismo plano H. Trazando $1—k$ y $2—n$ paralelamente a cm_2, obtenemos los puntos k y n (las proyecciones horizontales de los puntos buscados de intersección de AB con la superficie del cilindro) y luego los puntos K' y n' (las proyecciones frontales de estos puntos).

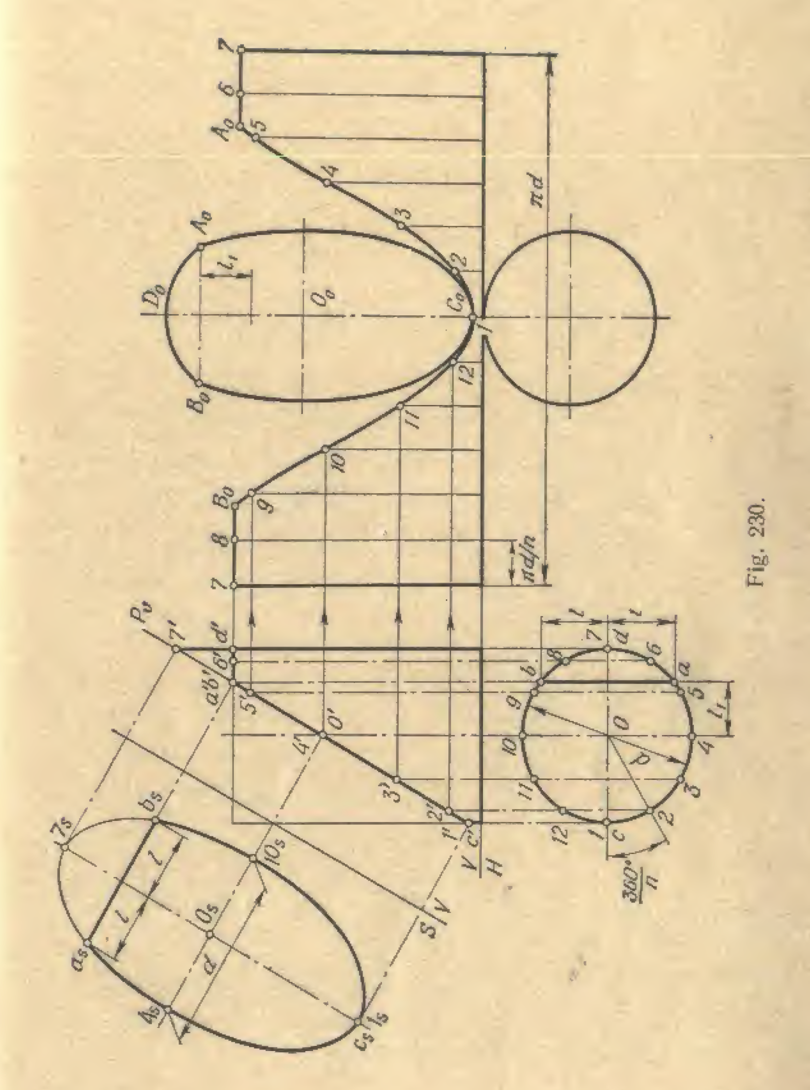


Fig. 230.

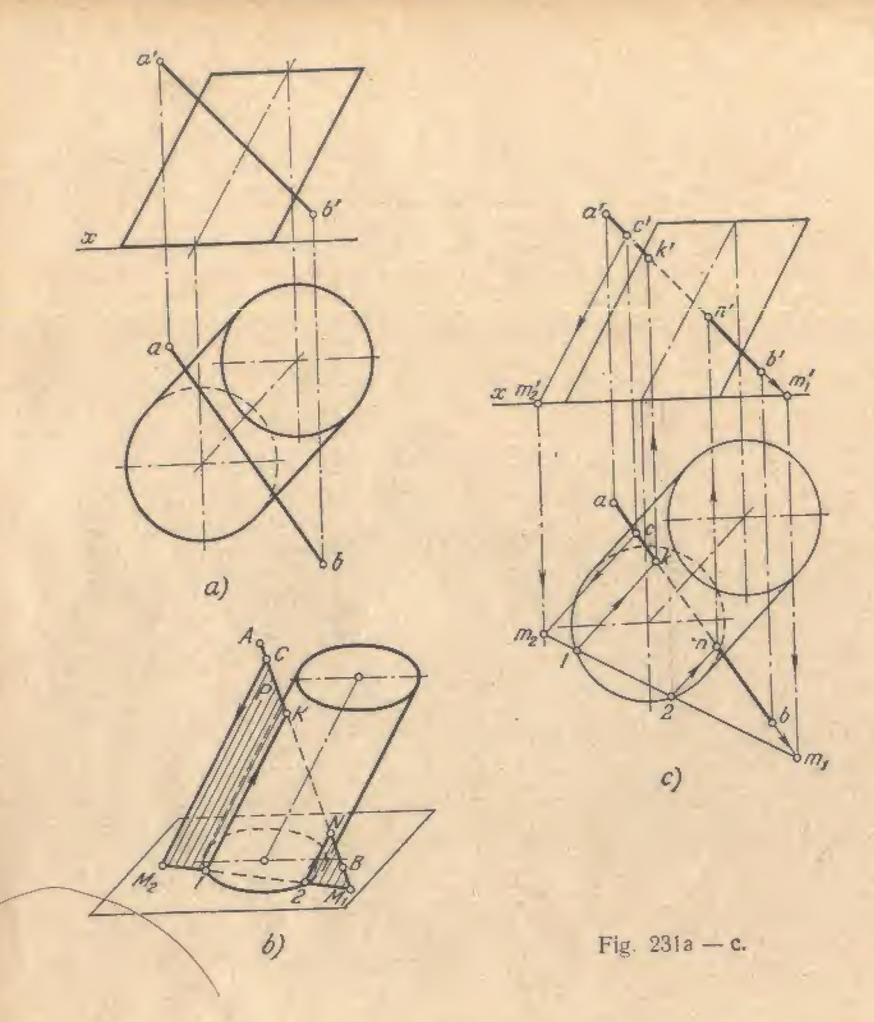


Fig. 231a — c.

249. Hallar los puntos de intersección de una superficie cilíndrica con una línea recta (fig. 232, *a* y *b*).

250*. Construir las proyecciones de la parte de un cono circular recto que queda al cortarlo con un plano proyectante frontal (fig. 233, *a* y *b*). Dar la forma verdadera de la sección y el desarrollo completo de la superficie del cuerpo representado.

Solución. A juzgar por la posición del plano secante respecto a las generatrices del cono, la línea en su superficie lateral que se obtiene en el plano P, representa una elipse. El eje mayor de esta elipse puede ser representado por el segmento $m'k'$. Dividiendo $m'k'$ por la mitad, obtenemos la proyección frontal del centro de la elipse (el punto O') y con ayuda de ésta, hallamos la proyección O. Ahora se puede hallar el semieje menor, trazando un plano secante por el punto O perpendicularmente al eje del cono y tomando en la sección circular obtenida la semicuerda l_1. El eje menor de la elipse es igual a $2l_1$. La proyección horizontal de la

elipse también representa una elipse; su eje mayor es la recta mk, y su eje menor (cd) es igual a $2l_1$.

Las construcciones ulteriores son semejantes a las efectuadas en la fig. 230. La forma verdadera de la figura de la sección se ha construido con auxilio del método de cambio de los planos de proyección, con la particularidad de que el plano auxiliar S se ha tomado coincidente con el plano P. La observación en la pág. 176 acerca de que la construcción se podía haber realizado sin introducir el plano S y los ejes V/H y S/V, es justa también para el caso en cuestión.

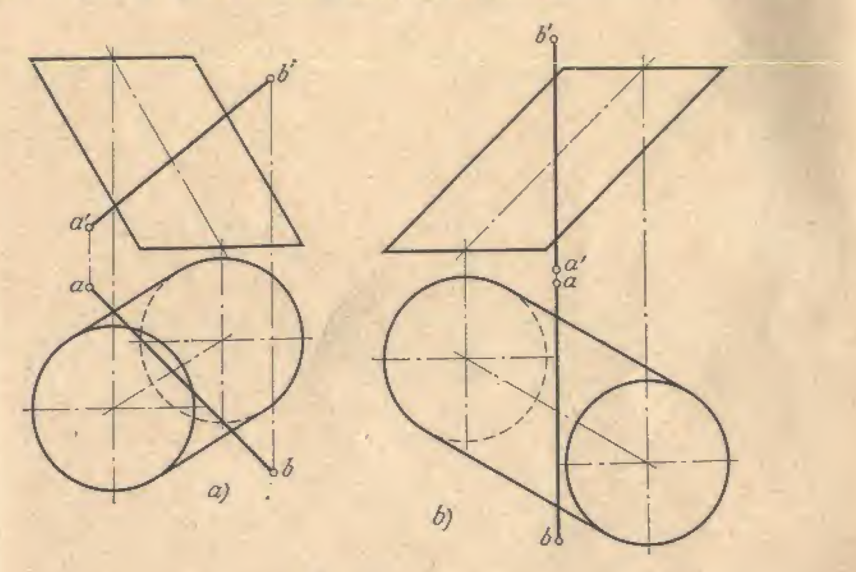


Fig. 232a, b.

Sabiendo que la superficie lateral del cono se desarrolla en un sector circular con un ángulo $\varphi = \frac{d}{l} \cdot 180°$ en el vértice, donde d es el diámetro de la base, y l es la longitud de la generatriz del cono, construimos un sector dividiéndolo en partes iguales en correspondencia con la marcación de las generatrices en el dibujo del cono. Conociendo, por ejemplo, la posición de la generatriz S—3 en el dibujo y en el desarrollo, hallamos la posición del punto N_0 en el desarrollo con ayuda de la magnitud verdadera del segmento l_3 de la generatriz desde el vértice S hasta el punto N.

En el desarrollo completo de la parte que queda de la superficie entran: a) el desarrollo de la superficie lateral delimitada por el arco de una circunferencia de radio l y la curva construida $A_0N_0M_0B_0$; b) partes de la circunferencia de la base; c) la forma verdadera de la sección, con la particularidad de que el círculo y la sección confinan por la cuerda A_0B_0.

251*. Hallar los puntos de intersección de la superficie de un cono circular recto con una línea recta (fig. 234, *a*).

Solución. Empleando un plano auxiliar trazado por la línea recta dada, nos proponemos asegurar el corte más simple del cono con este plano. El plano secante debe ser trazado por el vértice del cono. Este cortará al cono según líneas rectas (generatrices). En la fig. 234, *b* se muestra el plano P trazado por la recta dada AB y el vértice del cono. Trazando el plano T perpendicular al eje

Fig. 233a, b.

del cono y, por consiguiente, que corta a este último según una circunferencia, hallamos sobre el plano T la línea de su intersección con el plano P (la recta DE). Las generatrices según las cuales el plano P corta al cono se determinan por el vértice S y los puntos 1 y 2. Sobre estas generatrices se obtienen los puntos K y M, en los que la recta AB corta a la superficie del cono.

En la fig. 234, *c* el plano P viene dado por la recta AB y la recta SC, trazada por el vértice S, que corta a AB en el punto C, y que es paralela al plano T. El plano P corta al plano T según la recta DE paralela a SC. Por esta razón, hallado en el dibujo el punto D (el punto de intersección de la recta AB con el plano T),

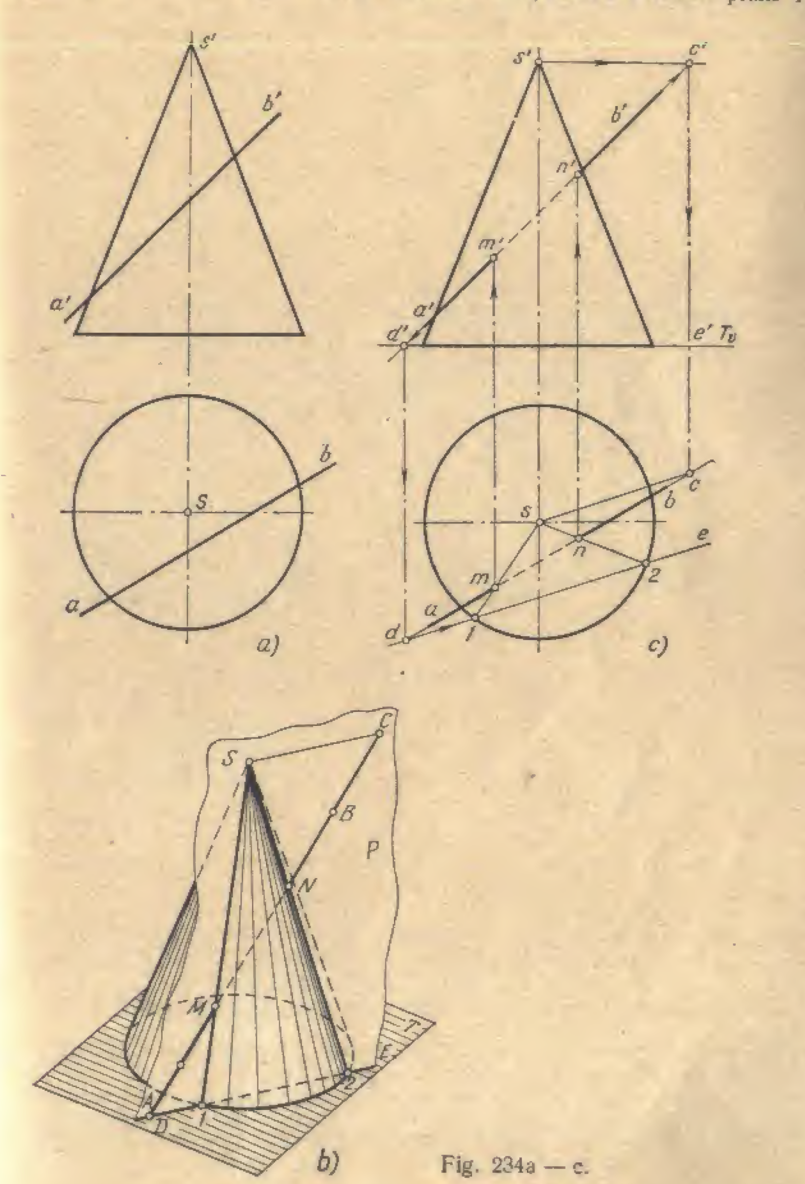


Fig. 234a — c.

trazamos *de*||*sc*. Las generatrices según las cuales el plano P corta a la superficie del cono, vienen representadas sólo por sus proyecciones $s—1$ y $s—2$. Esto basta para hallar las proyecciones horizontales m y n de los puntos de intersección, y con ayuda de éstos hallar las proyecciones m' y n'.

Si el cono se considera situado sobre el plano H, no hay necesidad de introducir el plano T.

252. Hallar los puntos de intersección de la superficie de un cono con una línea recta (fig. 235, *a* y *b*).

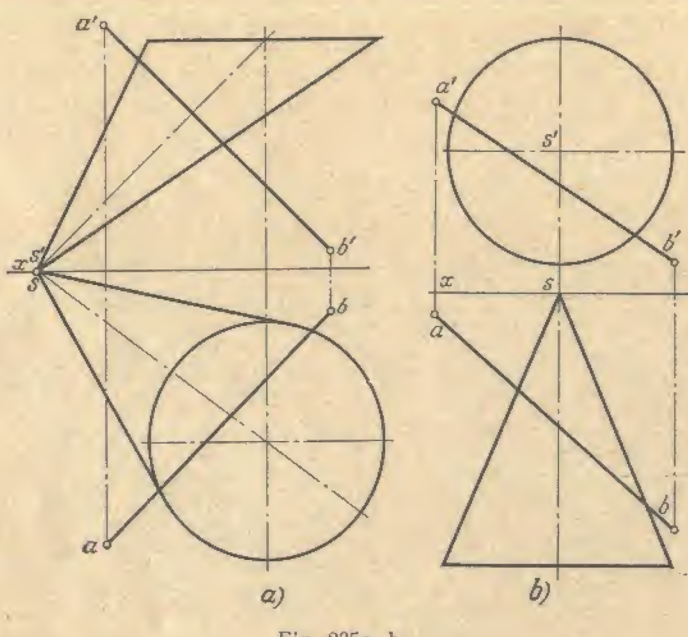


Fig. 235a, b.

Indicación. Tomar el plano del círculo en calidad de plano auxiliar, semejante al plano T en la fig. 234, *c*.

253*. Hallar los puntos de intersección de una línea recta con la superficie de una esfera (fig. 236, *a*).

Solución. Utilizando el plano secante auxiliar que pasa por la recta dada (fig. 236, *b*), obtenemos una circunferencia. Los puntos buscados M y N se obtienen en la intersección de esta circunferencia con la línea recta.

En la fig. 236, *c* vienen dadas las construcciones gráficas con auxilio del método de cambio de los planos de proyección.

El plano auxiliar S es perpendicular al plano H y paralelo al plano proyectante horizontal auxiliar T, trazado por la recta AB.

En el plano S está representada no la superficie dada de la esfera, sino que sólo la circunferencia que se obtiene sobre esta superficie al cortarla con el plano T. Una vez obtenida también la proyección $a_s b_s$, hallamos los puntos m_s y n_s, y con ayuda de estos hallamos los puntos m y n y luego m' y n'.

254. Hallar los puntos de intersección de una línea recta con la superficie de una esfera (fig. 237, *a* y *b*).

255*. Hallar los puntos de intersección de una línea recta con una superficie de revolución (fig. 238, *a*).

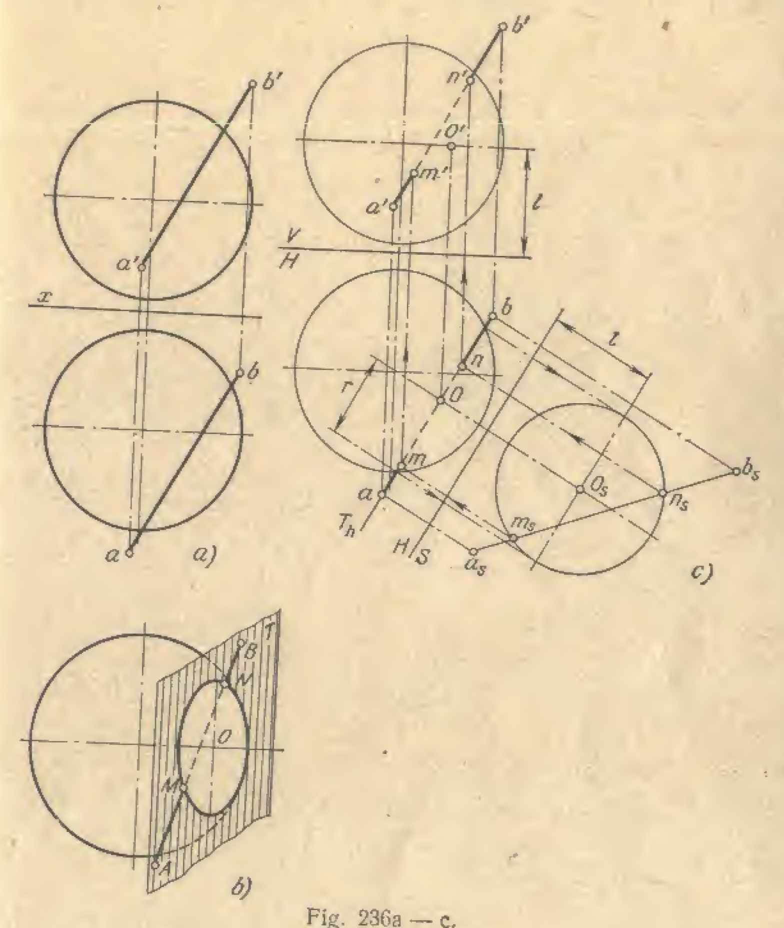


Fig. 236a — c.

Solución. Trazamos por la recta AB (fig. 238, *b*) un plano proyectante horizontal R y construimos la línea de su intersección con la superficie dada. Los puntos de esta línea los hallamos con la ayuda de los paralelos de la superficie. Por ejemplo, trazando el arco de radio $s—3$, obtenemos en la proyección frontal del meridiano principal el punto $3_1'$, que determina el nivel del paralelo correspondiente, y con ayuda del punto 3 hallamos el punto $3'$. Los puntos $4'$ y $5'$ se obtienen con auxilio de los puntos 4 y 5. El punto superior de la curva $1'$ lo hallamos con ayuda de su proyección horizontal 1.

Una vez construida la proyección frontal de la curva, hallamos los puntos de su intersección con la proyección frontal b', a saber: los puntos m' y n' que son las proyecciones frontales de los puntos buscados de intersección de la recta AB con la superficie dada. Con ayuda de los puntos m' y n' construimos m y n.

Si en calidad de plano auxiliar trazamos por AB un plano proyectante frontal (fig. 238, *c*), entonces también será necesario construir la línea curva. Ahora hallamos primero los puntos m y n, y con su ayuda, m' y n'.

Ambas resoluciones examinadas, en esencia, no se diferencian una de la otra. Pero nos podemos imaginar otro esquema de construcción, cuando el trazado del plano por la recta dada no es necesario. El hecho consiste en que la recta dada puede

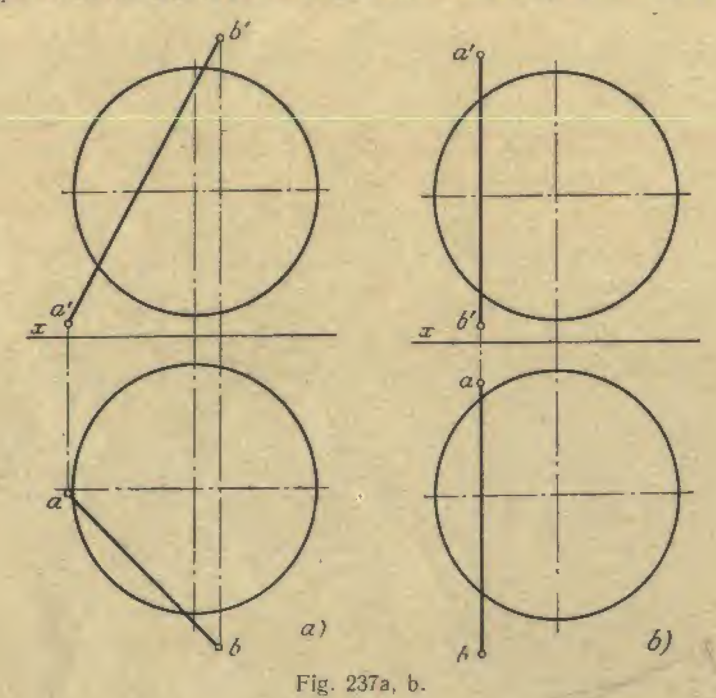


Fig. 237a, b.

desempeñar el papel de generatriz de un hiperboloide de revolución de una hoja con el mismo eje que la superficie dada (fig. 238, *d*). Puesto que ambas superficies de revolución son coaxiales, entonces se cortarán según circunferencias. Los puntos buscados de intersección de la recta con la superficie de revolución se obtendrán sobre estas circunferencias. Proponemos al lector efectuar esta construcción.

Un momento negativo en las construcciones dadas en la fig. 238, *b* y *c* es la necesidad de hacer uso de la curva; esto disminuye la exactitud de la determinación de las posiciones de los puntos M y N. Pero, también en el caso de utilizar el hiperboloide de revolución hay que construir por lo menos una de las ramas de la hipérbola, es decir, otra vez una curva. Esto también reduce la calidad del procedimiento de resolución del problema examinado.

256. Hallar los puntos de intersección de una línea recta con una superficie de revolución (fig. 239, *a* y *b*).

257*. Hallar el punto de intersección de la recta AB con la superficie de una conoide dada por las directrices CD y EF y el plano de paralelismo H (fig. 240, *a*).

Solución. Trazamos por la recta AB (fig. 240, *b*) un plano proyectante frontal R y construimos la curva MN de intersección de este plano con la conoide. Fijando sobre la curva CD una serie de puntos, trazamos por ellos generatrices

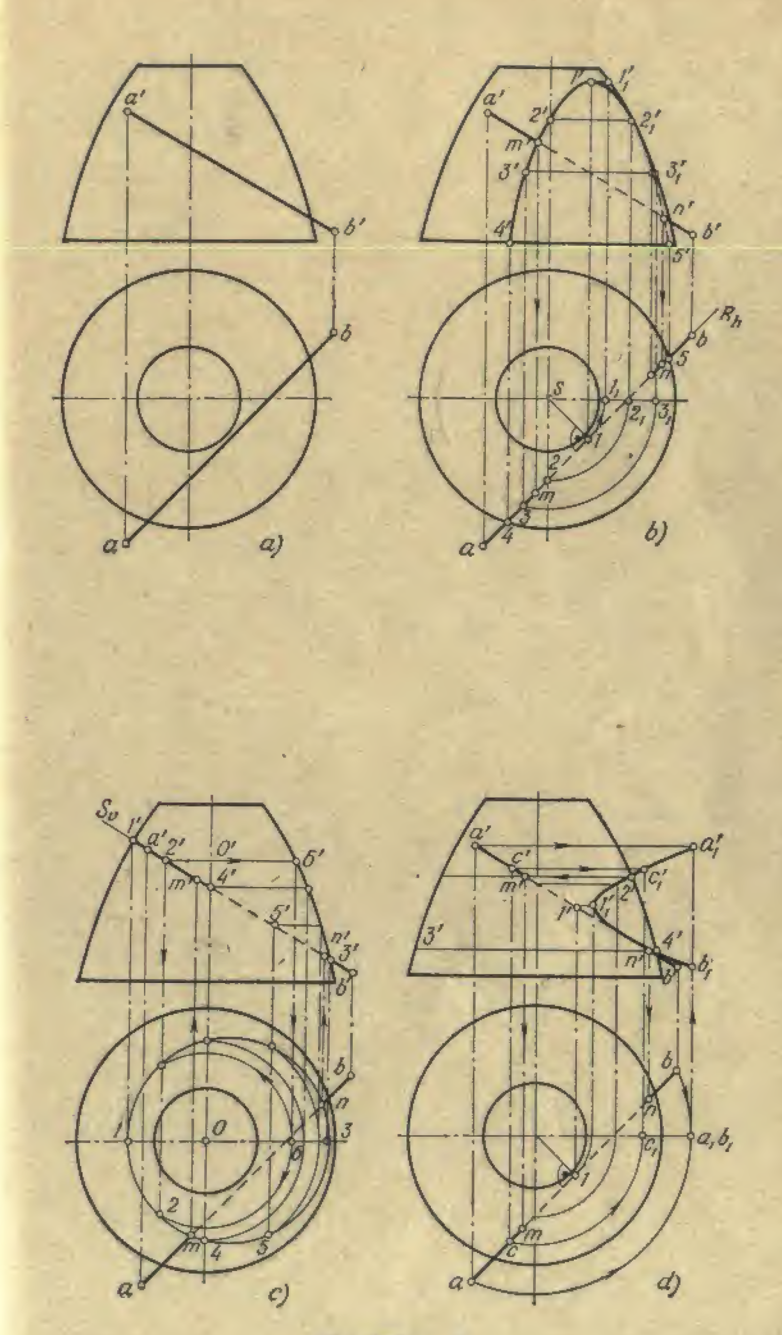


Fig. 238a — d.

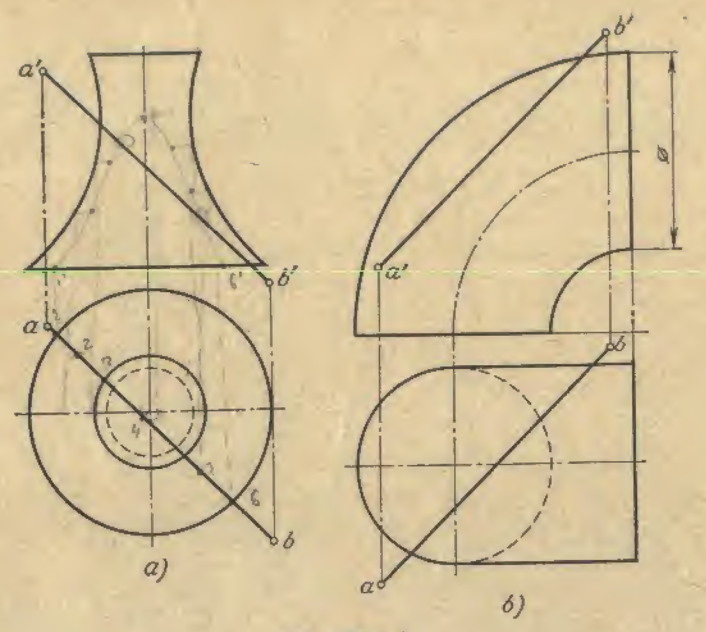


Fig. 239a, b.

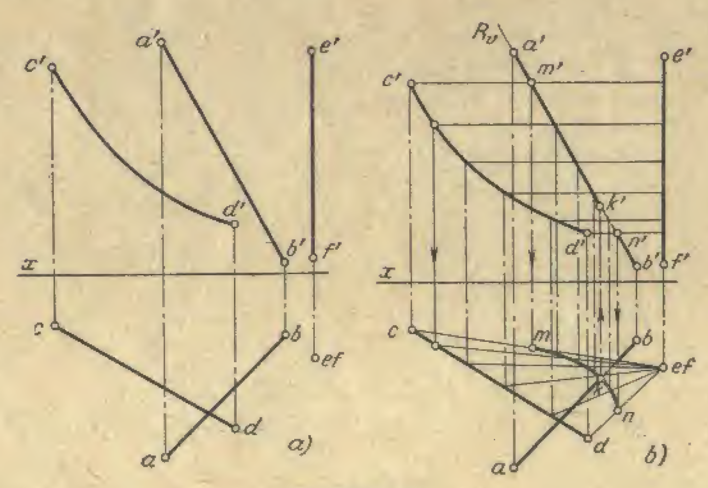


Fig. 240a, b.

paralelamente al plano *H*; las proyecciones horizontales de estas generatrices pasan por el punto *e* (*f*). Hallamos los puntos de su intersección con el plano *R*.

El punto *k* de intersección de la curva *mn* y la recta *ab* es la proyección horizontal del punto buscado; con ayuda de *k* hallamos *k'* sobre *a'b'*.

258. Hallar el punto de intersección de la recta *AB* con la superficie de una conoide dada por las directrices *CD* y *EF* y el plano de paralelismo *V* (fig. 241).

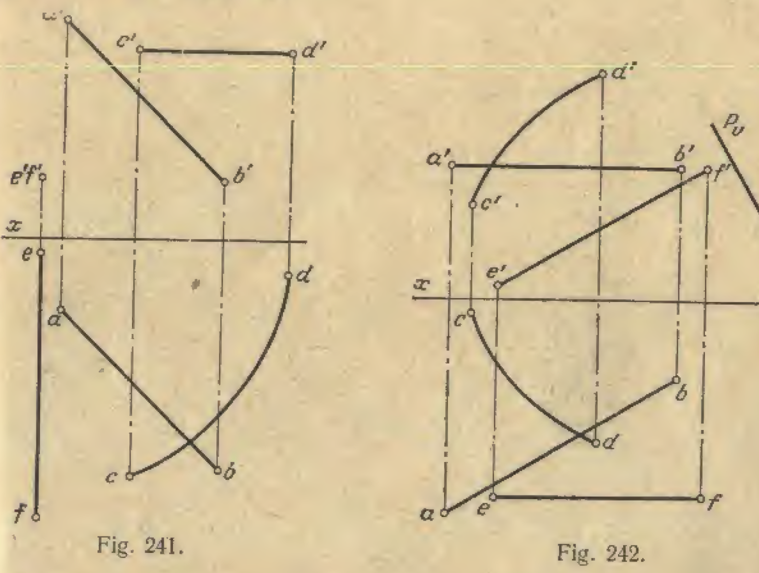


Fig. 241. Fig. 242.

259. Hallar el punto de intersección de la recta *AB* con la superficie de una conoide dada por las directrices *CD* y *EF* y el plano de paralelismo: el plano proyectante frontal *P* (fig. 242).

260*. Hallar el punto de intersección de la recta *AB* (fig. 243, *a*) con un plano oblicuo dado por las directrices *CD* y *EF* y el plano de paralelismo: el plano proyectante frontal *P*.

Solución. Trazamos por la recta *AB* (fig. 243, *b*) un plano proyectante frontal *R* y hallamos la curva de intersección de este plano con la superficie dada. Lo mismo que en el problema 257, tomamos sobre la recta *CD* una serie de puntos, trazamos por ellos generatrices (paralelamente al plano de paralelismo *P*) y construimos los puntos de intersección de estas generatrices con el plano *R*. Obtenemos una curva con las proyecciones *1'2'*, *1—2* y el punto *k* de intersección de las proyecciones *1—2* y *ab*. Este punto es la proyección horizontal del punto buscado. Con ayuda del punto *k* hallamos *k'* sobre *a'b'*.

261. Hallar el punto de intersección de la recta *AB* con un plano oblicuo dado por las directrices *CD* y *EF* y el plano de paralelismo *H* (fig. 244).

262. Hallar los puntos de intersección de la recta *AB* con un plano oblicuo dado por las directrices *CD* y *EF* y el plano de paralelismo *V* (fig. 245).

263*. a) Dividir la superficie del cuerpo de revolución dado en la fig. 246, *a* en zonas de superficies distintas por su forma; b) construir las proyecciones de perfil y frontal del cuerpo de revolución dado, cortado por los planos P_1 y P_2.

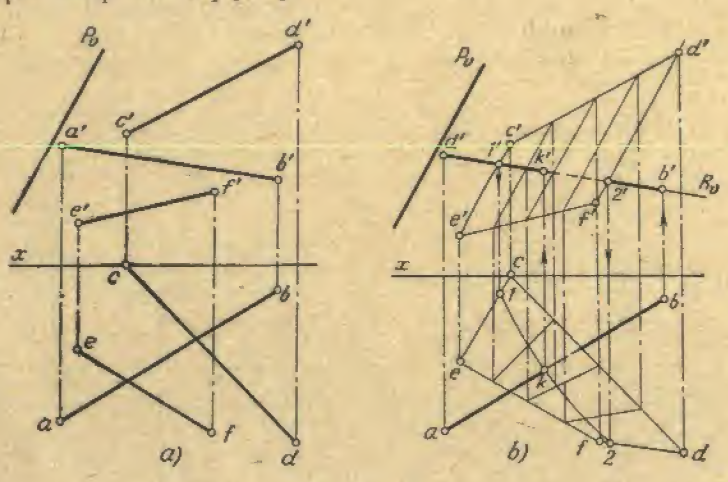


Fig. 243a, b.

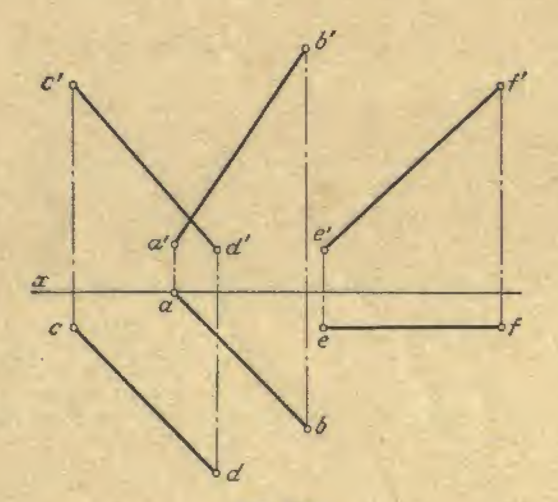


Fig. 244.

Solución. El cuerpo de revolución dado está compuesto de un cono, un cilindro, un anillo circular y un segmento esférico. La superficie del cuerpo contiene respectivamente las zonas: cónica *I*, cilíndrica *II*, de anillo circular *III*, esférica *IV* (fig. 246, *b*).

La superficie cónica es engendrada por el segmento *AB*, la cilíndrica, por el segmento *BC*, la superficie de anillo circular, por el arco *CD* de radio R_1, la esférica, por el arco *DE* de radio R_2.

Cada una de estas zonas colinda con la vecina por una circunferencia. Las circunferencias pasan respectivamente por los puntos *B*, *C* y *D*.

El plano P_2 corta a la superficie cónica (fig. 246, *c*) según la hipérbola *5—1—4—9*, a la cilíndrica según las generatrices que pasan por los puntos *5* y *9*, a la superficie de anillo circular según la curva *5—7—8* y a la esfera según la circunferencia de radio $R=O'1'$. Las líneas formadas en la superficie del cuerpo por el plano P_1, son iguales a las formadas por el plano P_2 y en la fig. 246, *c* sus proyecciones se confunden con las construidas, dado que los planos P_1 y P_2 son paralelos y equidistan del plano de simetría del cuerpo dado.

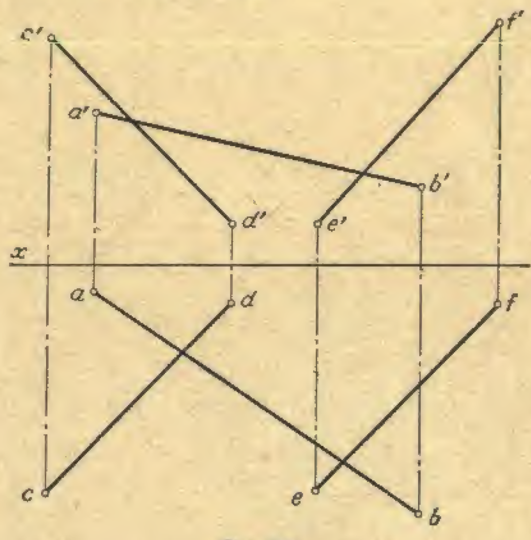


Fig. 245.

Tomando, por ejemplo, el plano secante S_1, obtenemos una circunferencia de radio $O''3''$. Esta circunferencia da en la intersección con el plano P_2 el punto *4″*, con ayuda del cual obtenemos en la proyección frontal el punto *4′* perteneciente a la hipérbola. Para obtener el vértice de la hipérbola, fijamos el punto *1″* (la proyección de perfil de este vértice) y construimos su proyección correspondiente *1′* sobre la superficie del cono.

En la fig. 246, *c* se muestra también un ejemplo de la construcción de la proyección frontal de uno de los puntos (*7*) de la curva según la cual el plano P_2 corta al cuerpo en la zona de anillo circular.

264. Construir la línea de corte en la superficie de un cuerpo de revolución (fig. 247). Tomar el plano secante paralelo al plano de proyección *V* y a la distancia *1′ O′* del eje del cuerpo de revolución. Calificar las líneas obtenidas, que forman parte de la línea de corte.

§ 23. INTERSECCIÓN MUTUA DE SUPERFICIES

265.* Construir: a) las proyecciones de la línea de intersección de las superficies de un prisma y una esfera; b) la forma verdadera de la sección *A—A* (fig. 248, *a*).

Fig. 246a — c.

Fig. 247.

Fig. 248a — c.

Solución. En este caso, una de las proyecciones de la línea de intersección, precisamente, la horizontal, es conocida, puesto que se confunde con la proyección horizontal de la superficie lateral del prisma. Esto simplifica considerablemente la construcción: ésta se reduce a la determinación de las proyecciones frontales de los puntos pertenecientes a la superficie de la esfera, con ayuda de sus proyecciones horizontales. Así, la proyección c' (fig. 248, *b*) se ha hallado con ayuda de la horizontal en la superficie de la esfera: esta horizontal tiene un radio igual a Oc. Los puntos d' y e' se han obtenido sobre la proyección frontal del meridiano principal de la esfera con auxilio de las proyecciones d y e, el punto a', sobre la proyección frontal del ecuador.

Otra circunstancia, que tiene gran importancia en la construcción, es que la línea de intersección que se obtiene es conocida: cada una de las caras del prisma corta a la superficie de la esfera según un arco de circunferencia. Uno de estos arcos, el arco situado en la cara posterior, se proyecta sobre el plano V en verdadera magnitud; su radio es igual a $a—3$. Los otros dos arcos se proyectan sobre el plano V en forma de arcos de elipses.

Trazando las perpendiculares $O—1$ y $O—2$, determinamos las proyecciones horizontales de los vértices de las elipses (los puntos 1 y 2); y con su ayuda, las proyecciones $1'$ y $2'$. En la fig. 248, *b*, los arcos de elipses se muestran tras los puntos c' y b' con líneas de puntos y rayas. En la fig. 248, *b* el cuerpo está representado como un monolito (por ejemplo, una pieza de fundición). Por eso la sección en la fig. 248, *c* está representada en forma de una sola figura, cosa que se subraya con rayado.

266. Construir: a) las proyecciones de la línea de intersección de las superficies de un prisma y un cilindro; b) la forma natural de la sección $A—A$ (fig. 249).

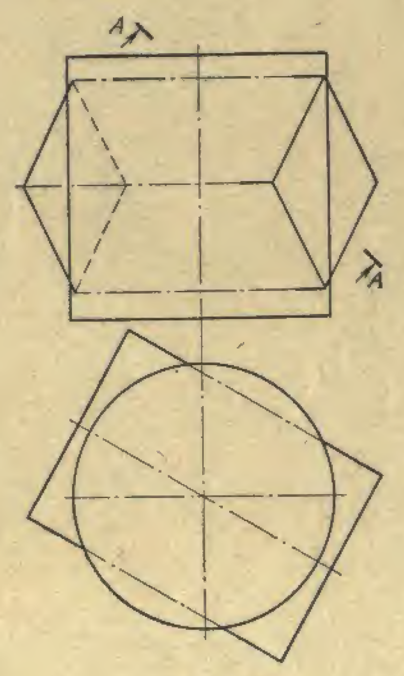


Fig. 249

Indicación. La proyección horizontal de la línea de intersección en los problemas 266 y 267 coincide con parte de la proyección correspondiente del cuerpo.

267. Construir: a) las proyecciones de la línea de intersección de las superficies de un prisma y un cono; b) la forma natural de la sección $A — A$ (fig. 250).

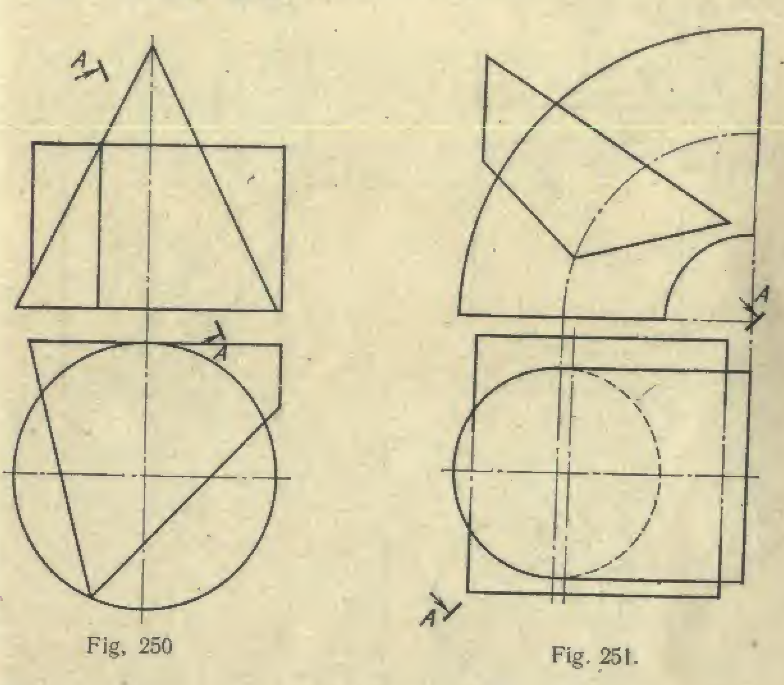


Fig. 250

Fig. 251.

268. Construir: a) las proyecciones de la línea de intersección de las superficies de un prisma y un anillo circular; b) la forma natural de la sección $A — A$ (fig. 251).

Indicación. La proyección frontal de la línea de intersección coincide con una parte de la proyección correspondiente del prisma.

269*. Construir: a) las proyecciones de la línea de intersección de las superficies de un cilindro y una esfera; b) la forma natural de la sección $A — A$ (fig. 252, *a*).

Solución. Todos los puntos de la proyección frontal del cilindro (fig. 252, *b*) pueden ser tomados como las proyecciones frontales de los puntos pertenecientes a la línea de intersección buscada. De aquí, es fácil hallar, por ejemplo, las proyecciones d, m y n en las proyecciones horizontales de los paralelos correspondientes de la esfera, las proyecciones a, b y k en las proyecciones horizontales de los arcos de circunferencias descritas sobre la proyección frontal de la esfera, con radios $c'a'$, $c'b'$ y $c'k'$. Los puntos a y b representan las proyecciones horizontales de los puntos característicos de la línea de intersección, el punto más cercano y el punto más alejado del plano V. Las proyecciones m', m y n', n determinan los puntos de intersección de las generatrices de contorno del cilindro con la esfera.

El cuerpo representado (el conjunto de las partes de la esfera y el cilindro)

Fig. 252a—c.

se considera como una pieza monolítica. Al construir la sección $A—A$ se ha obtenido la sección de una parte de la esfera, delimitada por el arco de circunferencia de radio $O_0 1_0$ y dos segmentos de rectas, según las cuales el plano $A—A$ corta a los «cuartos» de los círculos que delimitan por la derecha y por debajo a la parte examinada de la esfera. Luego se ha obtenido la parte de la elipse (en la fig. 252, *c* la elipse viene representada entera) como sección del cilindro. El segmento $2_0 2_{10}$ se ha obtenido como resultado de la intersección del plano que delimita al cilindro.

270. Construir: a) las proyecciones de la línea de intersección de las superficies de un cilindro y un cono; b) la forma natural de la sección $A - A$ (fig. 253).

Indicación. La proyección frontal de la línea de intersección coincide con una parte de la proyección correspondiente del cilindro.

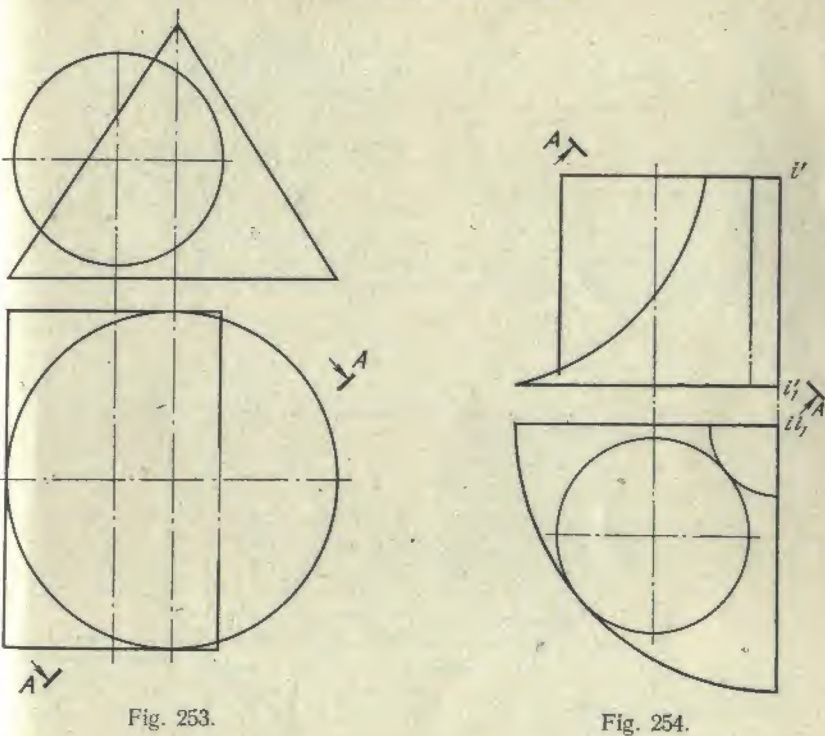


Fig. 253.

Fig. 254.

271. Construir: a) las proyecciones de la línea de intersección de las superficies de un cilindro y un cuerpo de revolución (cuyo eje II_1 es perpendicular al plano H); b) la forma natural de la sección $A - A$ (fig. 254).

Indicación. La proyección horizontal de la línea de intersección coincide con la proyección correspondiente del cilindro.

272*. Construir: a) las proyecciones de la línea de intersección de las superficies de un cono y una esfera; b) la forma natural de la sección $A - A$ (fig. 255, *a*).

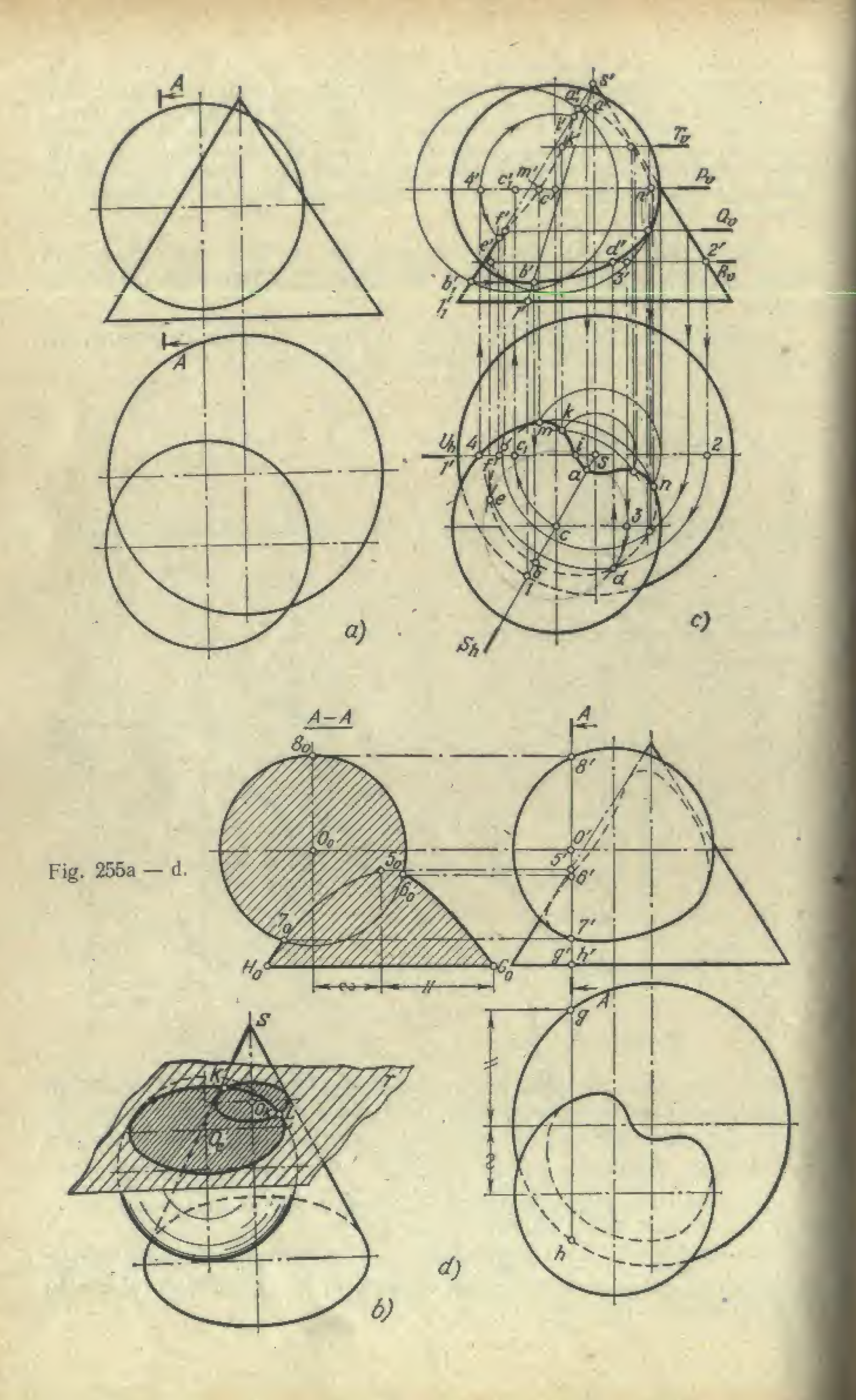


Fig. 255a — d.

Solución. En este caso, ninguna de las proyecciones de ambos cuerpos dados coincide completa o parcialmente con las proyecciones de la línea de intersección buscada. Nosotros no podemos partir del hecho de que la posición de las proyecciones de sus puntos es conocida por nosotros, como esto sucedió en los problemas 265 y 269. Por eso, aquí empleamos el procedimiento general de construcción de los puntos de intersección mutua de superficies, a saber: la introducción de planos secantes auxiliares (fig. 255, *b*) que cortan a cada una de las superficies dadas según ciertas líneas, y la determinación de los puntos, comunes para estas superficies, en la intersección de las líneas, obtenidos sobre ellas.

Teniendo en cuenta la propiedad y la posición de las superficies dadas, emplearemos, en este caso, una serie de planos secantes paralelos al plano H. Cada uno de estos planos corta a la superficie del cono y de la esfera según circunferencias (fig. 255, *c*). Por ejemplo, el plano R produce en el cono una circunferencia de radio s—2, y en la esfera, una circunferencia de radio s—3. Estas circunferencias, en su intersección, determinan los puntos D y E, comunes para las superficies del cono y la esfera.

Pero, además de los puntos obtenidos de semejante modo, hay que construir algunos puntos característicos, la posición de los cuales precisa la línea buscada. Ante todo, estos son los puntos superior e inferior en la proyección frontal. Para su determinación empleamos también cierto plano S que pasa por el eje del cono y por el centro de la esfera y que es para estos cuerpos el plano común de simetría. El plano S corta a la superficie del cono según las generatrices, y a la superficie de la esfera según una circunferencia; girando el plano S, junto con las líneas obtenidas en él, alrededor del eje del cono hasta la posición paralela al plano V, obtenemos los puntos a_1' y b_1', y con ayuda de éstos hallamos primero a' y b', y luego a y b.

Los puntos f', f e i' tienen importancia en el meridiano principal del cono, puesto que en ellos se determinan los puntos de intersección de la generatriz extrema $s'1_1'$, s—1_1 con la superficie de la esfera; para hallar estos puntos se ha tomado el plano auxiliar U, que corresponde al meridiano principal del cono y que corta a la superficie de la esfera según una circunferencia de radio $c'4'$.

Se deben hallar también los puntos en el ecuador de la esfera, para lo cual en la serie de planos secantes horizontales hay que tomar el plano P: en los puntos m y n, la proyección horizontal del ecuador se empalma con la parte vista de la proyección de la línea de intersección sobre el plano H.

La sección A—A (fig. 255, *d*) está contorneada por el arco de una circunferencia (obtenido como resultado de la intersección de la superficie de la esfera), por partes de una hipérbola (como resultado de la intersección de la superficie cónica) y por el segmento H_0G_0 (como resultado de la intersección de la base del cono). Es necesario prestar atención en el desplazamiento del centro de la sección circular de la esfera respecto del eje de la hipérbola.

273. Construir las proyecciones de las líneas de intersección: *a*) de las superficies de un toro y un elipsoide de revolución (fig. 256, *a*); *b*) de las superficies de un toro y una esfera (fig. 256, *b*). En ambos casos construir la sección A — A.

274*. Construir las proyecciones de la línea de intersección de las superficies de un cono y un cilindro (fig. 257, *a*).

Solución. Aquí, lo mismo que en el problema 272, hay que recurrir a los planos secantes auxiliares. ¿Cuáles planos son los más cómodos en este caso? Estos son los planos que pasan por el vértice del cono y paralelos a las generatrices del cilindro (fig. 257, *b*). Tales planos (por ejemplo, el plano P) cortan a ambas superficies según rectas (generatrices), la posición de las cuales se determina por los puntos de intersección de las bases de los cuerpos dados con la traza del plano secante sobre el plano de las bases. La construcción viene dada en la fig. 257, *c*).

Por el punto s', s se ha trazado una recta paralela a la generatriz del cilindro, se han hallado las proyecciones m' y m de la traza horizontal de esta recta.

Si las trazas horizontales de los planos secantes se trazan por el punto m de modo tal, que cada una de ellas corte o haga contacto con las bases del cono y el cilindro, entonces en las superficies del cono y el cilindro se revelan generatrices, en las intersecciones de las cuales se obtienen los puntos de la línea buscada. Detengámonos primeramente a los puntos sobre las generatrices, que son de contorno en la proyección horizontal. Trazamos las trazas de los planos en las direcciones $m—6$ y $m—1$ tangentes a las circunferencias de las bases; en cada una de las superficies obtenemos tres generatrices: en el cono las generatrices $s—1$, $s—5$ y $s—4$, y en el cilindro, las generatrices de los puntos 6, 2 y 3.

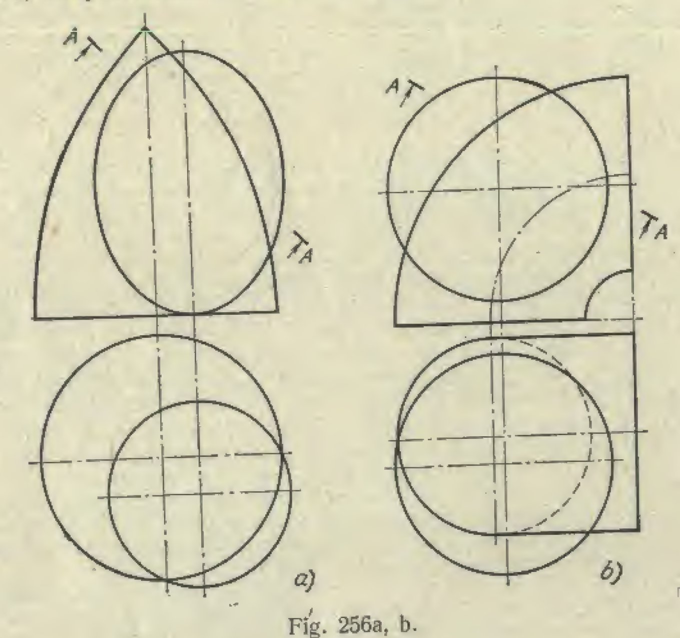


Fig. 256a, b.

Queda tomar los puntos de intersección de las generatrices: en la proyección horizontal los puntos a, b, c y d, y en la proyección frontal los puntos a', b', c' y d'.

Ahora, para hallar los puntos que se encuentran en las generatrices de contorno de las proyecciones frontales de los cuerpos, trazamos las trazas de los planos secantes por las proyecciones horizontales de los extremos de las correspondientes generatrices (los puntos 7, 8, 9 y 10, fig. 257, d).

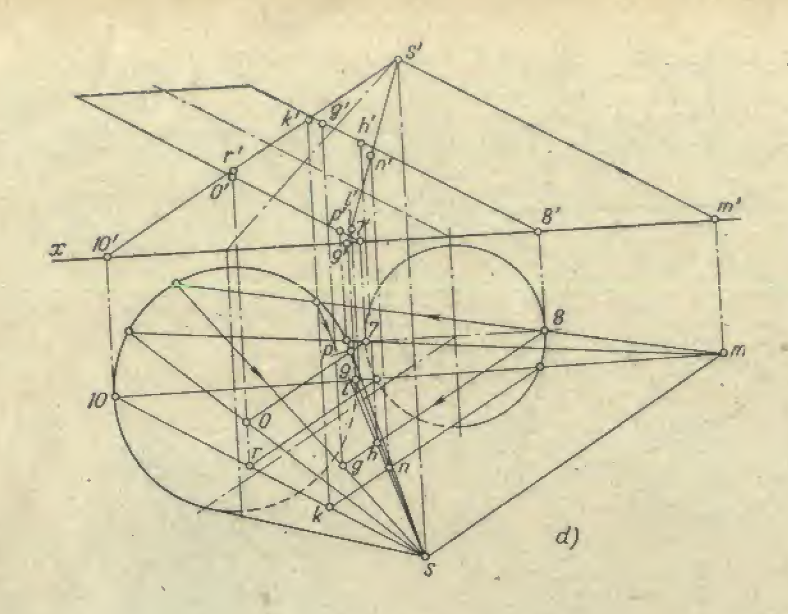
De este modo, hallamos los puntos g, h, k, l, n, o y p, y con ayuda de éstos, las proyecciones frontales.

En la fig. 257, e se muestra un ejemplo de la determinación de los puntos intermediarios (E y F) y se han trazado ambas proyecciones de la línea buscada.

275. Construir las proyecciones de las líneas de intersección: a) de dos superficies cilíndricas (fig. 258, a); b) de dos superficies cónicas (fig. 258, b).

276*. Construir las proyecciones de la línea de intersección de una superficie cilíndrica con un plano oblicuo. El plano oblicuo está dado por las directrices AB y CD, siendo el plano H el plano de paralelismo (fig. 259, a).

Fig. 257a—c.



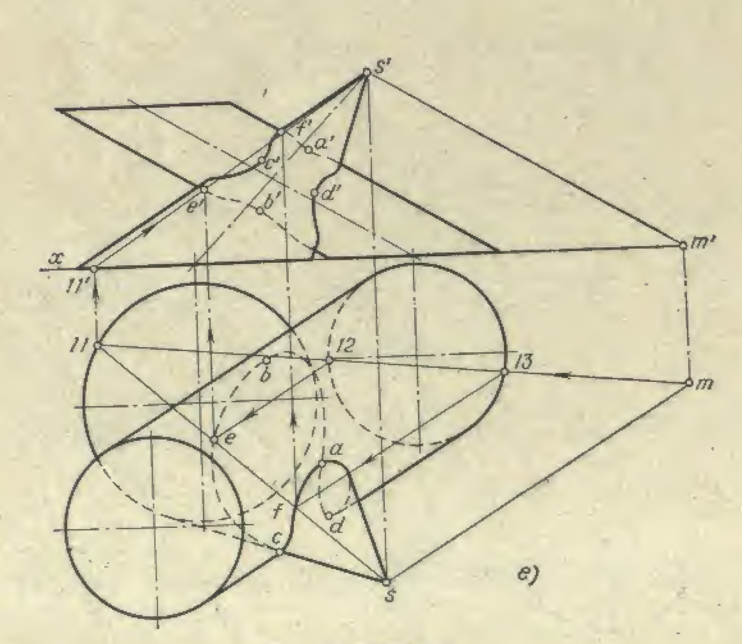


Fig. 257d, e.

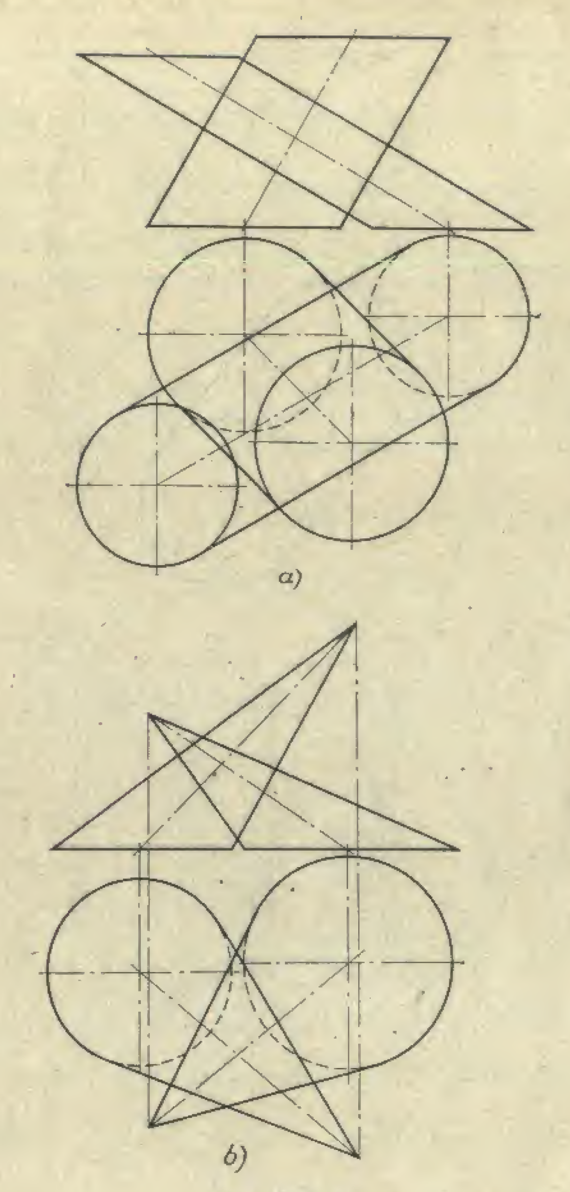


Fig. 258a, b.

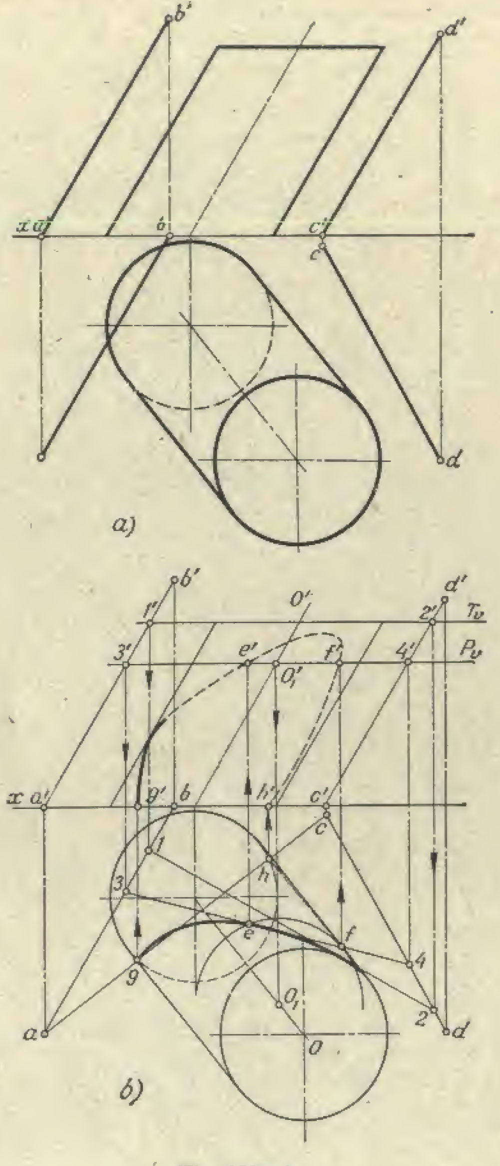


Fig. 259a, b.

Solución. Teniendo en cuenta las propiedades y la posición de las superficies dadas, a saber: que el cilindro tiene una serie de secciones circulares en los planos paralelos al plano H, y que las generatrices del plano oblicuo son paralelas al mismo plano H, tomamos una serie de planos auxiliares (T, P, etc.) paralelos al plano H (fig. 259, *b*).

Estos planos cortan a la superficie cilíndrica según circunferencias con centros O, O_1, etc., y al plano oblicuo, según las rectas *1—2*, *3—4*, etc. Las proyecciones horizontales de los puntos buscados (*e*, *f* y otros) se encuentran en las intersecciones de las correspondientes proyecciones de estas circunferencias y rectas. Con ayuda de las proyecciones horizontales hallamos las proyecciones frontales e', f' y otras. La línea de intersección buscada pasa por los puntos hallados.

En la fig. 259, *b* se muestran el resultado de la intersección del plano oblicuo con el cilindro y el propio cilindro; el plano oblicuo no viene representado.

277. Construir las proyecciones de la línea de intersección: a) de una superficie cónica con un plano oblicuo, cuyas directrices son las rectas AB y CD, y el plano de paralelismo es el plano H (fig. 260, *a*); b) de una conoide, cuyas directrices son la curva AB y la recta CD y el plano de paralelismo es el plano H, con una superficie cilíndrica (orificio) (fig. 260, *b*).

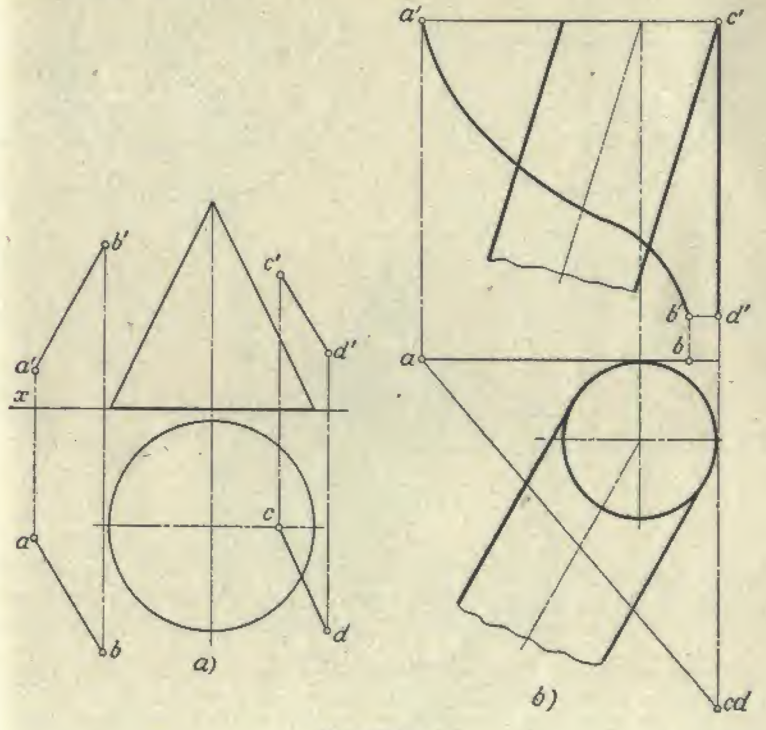


Fig. 260a, b.

278*. Construir las proyecciones de la línea de intersección de la superficie de un cono con la superficie de un toro, que delimita el orificio en el cono (fig. 261, *a*).

Solución. En este problema tenemos un caso de intersección mutua de dos superficies de revolución, cuyos ejes se cortan y están situados en un plano paralelo al plano *V*. En semejantes casos el procedimiento más simple es el empleo de esferas auxiliares, trazadas desde el punto de intersección de los ejes de ambas superficies

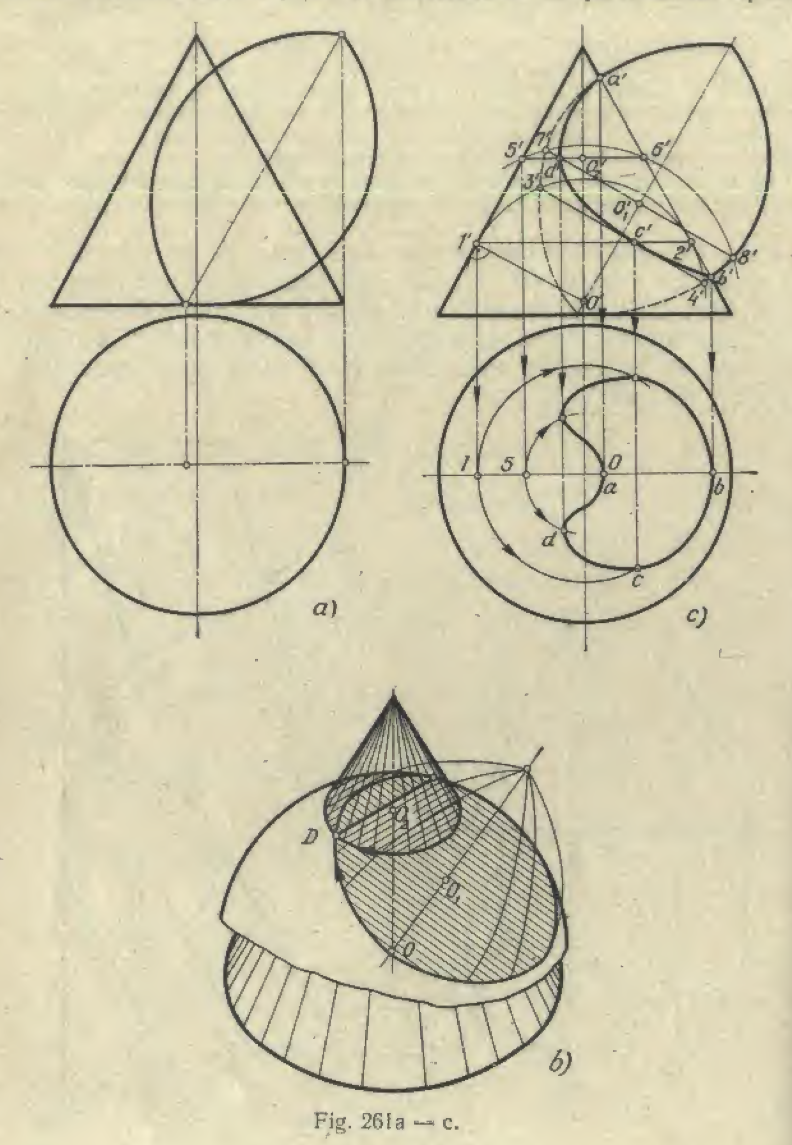


Fig. 261a — c.

(fig. 261, *b*). Estas esferas cortan a las superficies dadas según circunferencias, en la intersección de las cuales se obtienen puntos comunes para ambas superficies.

En la fig. 261, *c* se muestra el empleo de dos esferas. La proyección frontal de una de ellas se ha trazado como circunferencia de radio $O'5'$ con centro en el punto O'. El segmento $5'6'$ es la proyección frontal de la circunferencia según la cual la

esfera corta a la superficie cónica, y el segmento $7'8'$ es la proyección frontal de la circunferencia según la cual la esfera corta a la superficie del toro. Se obtiene el punto d', que es la proyección frontal de uno de los puntos, común para las superficies del toro y el cono. Con ayuda del punto d' hallamos sobre el paralelo del cono la proyección d y la proyección simétrica a esta última.

La esfera de radio $O'1'$ solamente hace contacto con la superficie cónica según una circunferencia, pero corta a la superficie del toro. Por esta razón, el punto c', obtenido con auxilio de esta esfera, tiene un significado especial: si se toman esferas con radio menor que $O'1'$, entonces, con ayuda de estas esferas no obtendremos puntos comunes para las superficies dadas. En el punto c' la proyección frontal de la línea de intersección solamente hará contacto con la recta $3'4'$, pero no la cortará.

La posición de los puntos a' y b' es evidente.

Los radios de las esferas auxiliares deben tomarse en este caso en los límites de $O'1'$ a $O'a'$.

279. Construir las proyecciones de la línea de intersección: a) de una superficie de revolución con la superficie de un hiperboloide de revolución (fig. 262, *a*); b) de las superficies de dos toros (fig. 262, *b*), y en ambos casos construir la sección *A* — *A*.

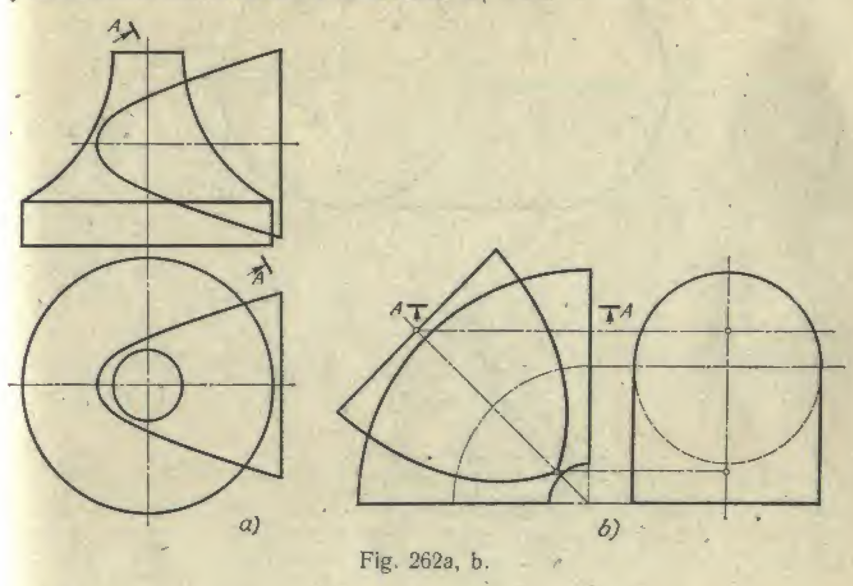


Fig. 262a, b.

280*. Construir las proyecciones de la línea de intersección de una superficie cilíndrica con la superficie de un cono de revolución, que delimita el orificio en el cilindro (fig. 263, *a*).

Solución. De las dos superficies dadas sólo una es de revolución, la cónica. La otra superficie no es de revolución. Es un cilindro llamado circular oblicuo (se llama circular por tener una serie de secciones circulares paralelas entre sí). En este caso, estas secciones son paralelas al plano *H*. Además, hay un plano de simetría, común para el cono y el cilindro, paralelo al plano *V*.

Estas circunstancias nos dictan el empleo de esferas auxiliares, pero no con centro constante como en el problema 278.

En efecto, la sección circular del cilindro puede ser aceptada como paralelo de cierta esfera. Por ejemplo, la circunferencia de radio $c_1'1'$ (fig. 263, *b*) puede ser el

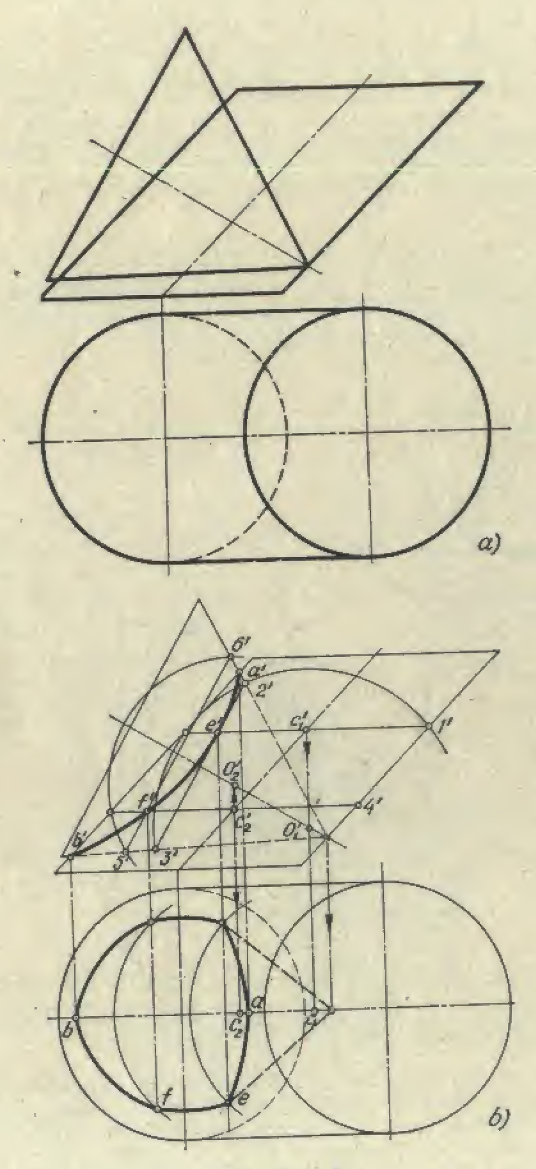


Fig. 263a, b.

paralelo de muchas esferas, cuyos centros se sitúan sobre la recta trazada por c_1' perpendicularmente al plano del paralelo. Si tomamos sobre esta perpendicular un punto en la intersección con el eje del cono, entonces este punto (con la proyección frontal O_1') puede ser considerado como centro de la esfera de radio $O_1'1'$, que corta al cilindro según la circunferencia de radio $c_1'1'$, y al cono de revolución, según la circunferencia de diámetro $2'3'$. De aquí obtenemos puntos, cuyas proyecciones frontales se confunden en un mismo punto e' (uno de estos puntos se encuentra en la parte de la línea de intersección dirigida hacia nosotros, y el otro, en la parte simétrica).

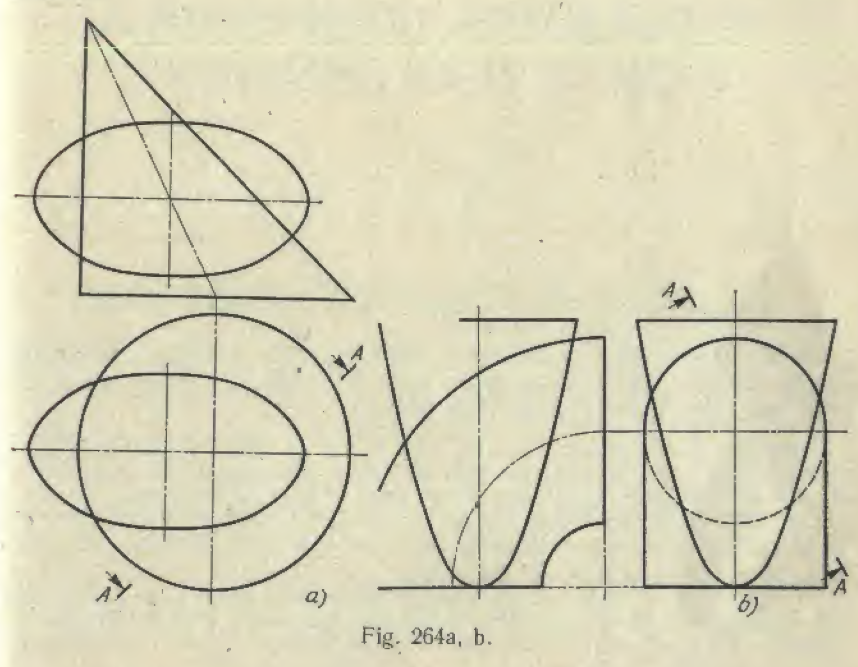


Fig. 264a, b.

En la fig. 263, *b* se expone un ejemplo más de semejante construcción. Prefijando en el cilindro la circunferencia de radio $c_2'4'$ hallamos la proyección frontal del centro de la esfera en el punto O_2' y el radio de la esfera igual a $O_2'4'$. Con ayuda de esta esfera se han obtenido puntos comunes para las superficies del cono y el cilindro, con las proyecciones frontales en el punto f'.

La posición de los puntos a' y b' es evidente.

Las proyecciones horizontales de los puntos las construimos, con auxilio de sus proyecciones frontales, sobre las circunferencias (las proyecciones horizontales de las circunferencias tomadas en la superficie del cilindro).

281. Construir las proyecciones de la línea de intersección: a) de una superficie cónica con la superficie de un elipsoide de revolución (fig. 264, *a*); b) de la superficie de un toro con la superficie de un paraboloide de revolución (fig. 264, *b*).

En ambos casos construir la sección $A - A$.

VII

CAPÍTULO

PROBLEMAS COMBINADOS DEL CURSO GENERAL

§ 24. PROBLEMAS CON PROTOTIPOS RESUELTOS

282*. Determinar la distancia desde el punto A hasta el punto más cercano de la superficie: a) de un cono (fig. 265, *a*); b) de una esfera (fig. 265, *b*); c) de un toro (fig. 265, *c*).

Solución. a) La distancia buscada (fig. 265, *a*) es igual a la distancia desde el punto dado hasta la generatriz más cercana a este punto. Esta generatriz se encuentra en el plano N que pasa por el punto A y el eje del cono.

Giramos este plano alrededor del eje del cono hasta la posición paralela al plano V. El punto A ocupará la posición $A_1 (a_1, a_1')$, y la distancia buscada se expresará por el segmento $a_1' l_1'$, perpendicular a $s'b_1'$.

b) En la fig. 265, *b* se muestra que la distancia buscada se mide por la recta AO. Girando la recta AO alrededor del eje que pasa por el punto O perpendicularmente al plano H, de modo tal, que AO quede paralela al plano V, obtendremos que $l = A_1O - R = a_1'O' - R$.

c) La distancia desde el punto A hasta la superficie del toro (fig. 265, *c*) se mide por la magnitud del segmento de la normal a la superficie del toro en el plano que pasa por el punto A y el eje del toro. Girando este plano alrededor del eje del toro hasta obtener la posición paralela al plano V, y trazando la recta $a_1'O'$, obtendremos el punto l_1' y el segmento $a_1'l'_1$. Este es precisamente la normal a la superficie del toro, que pasa por el punto A_1, y antes del giro, por el punto A.

283*. Mediante el giro alrededor del eje $O_1 O_2$ abatir el punto A sobre la superficie de un cono de revolución (fig. 266, *a*).

Solución. El giro del punto A alrededor del eje O_1O_2 tiene lugar en el plano T (fig. 266, *b*), perpendicular al eje O_1O_2. El centro del arco de circunferencia, por el que se desplaza el punto A, se encuentra en el punto de intersección del eje O_1O_2 con el plano de giro T. La proyección horizontal de este centro coincide con los puntos O_1 y O_2. Ahora bien, trazando desde el punto $O_1(O_2)$ un arco de radio O_1a, obtendremos sobre este arco la proyección horizontal del punto A cualquiera que sea su posición en el plano T durante el giro alrededor del eje O_1O_2. Pero para que el punto A se encuentre, en este caso, sobre la superficie del cono de revolución dado, hay que, evidentemente, tomar el paralelo de la superficie cónica al nivel

del plano T, es decir, la circunferencia de radio $O'\ l'$. Sobre esta circunferencia hallamos precisamente el punto A, cuando éste, al ser girado alrededor del eje O_1O_2, queda situado sobre la superficie del cono dado. Valiéndonos de las proyecciones las horizontales a_1 y a_2 hallamos las proyecciones a_1' y a_2'. En la posición A_1 el punto A estará oculto respecto del plano V, y en la posición A_2, visible. En las posiciones A_1 y A_2, el punto A será visible respecto del plano H.

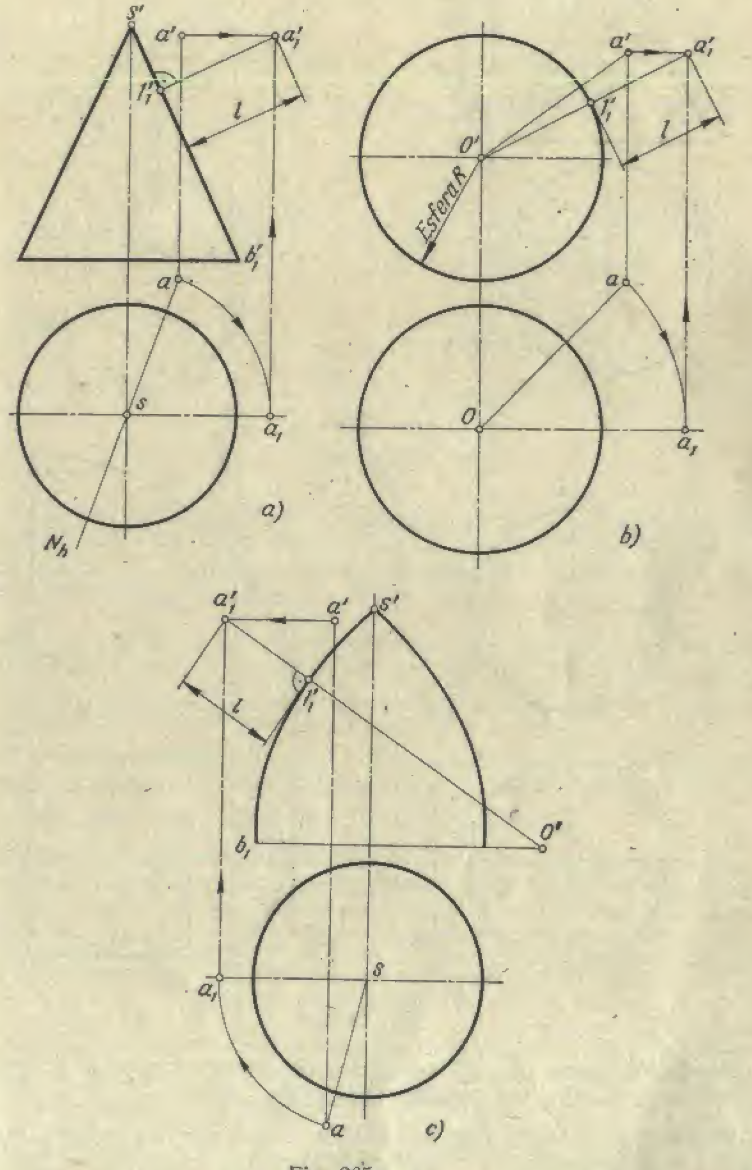


Fig. 265a — c

284. Mediante el giro alrededor del eje O_1 O_2 abatir el punto A sobre: a) una superficie esférica (fig. 267, *a*); b) la superficie de un toro (fig. 267, *b*).

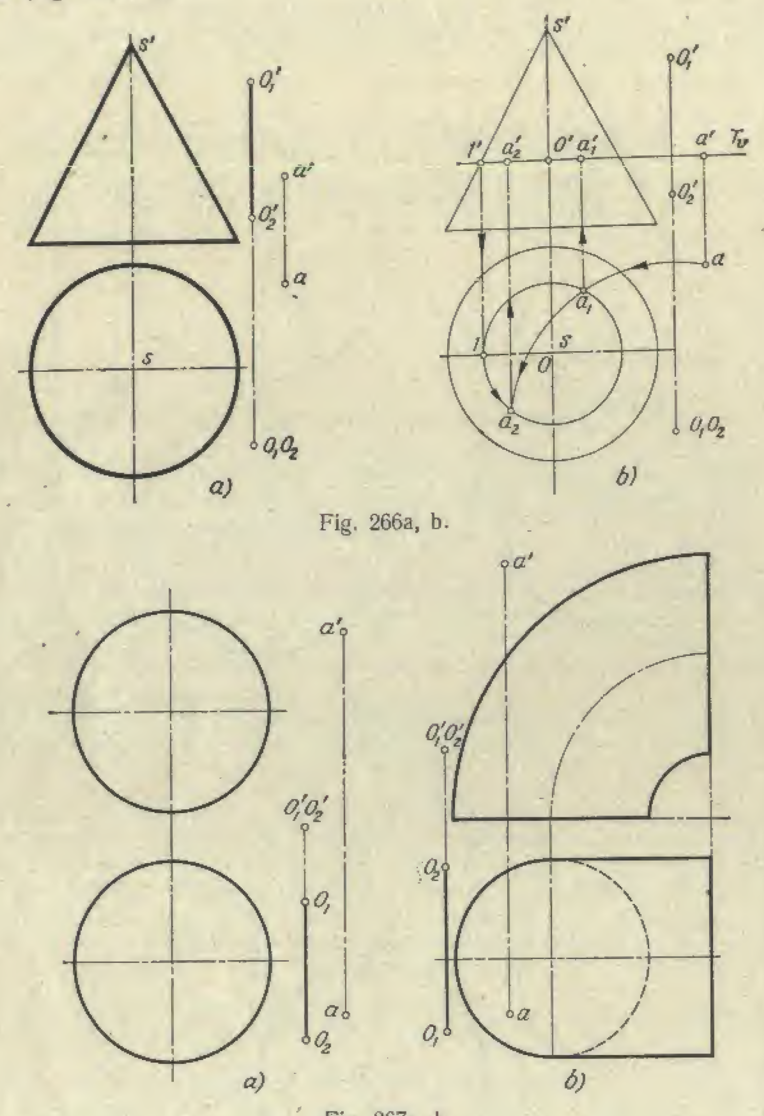


Fig. 266a, b.

Fig. 267a, b.

285*. Mediante el giro alrededor del eje O_1O_2 abatir el punto A sobre una superficie helicoidal (fig. 268, *a*).

Solución. La superficie helicoidal oblicua dada tiene un eje paralelo al eje O_1O_2. En la posición indicada en el dibujo, el punto *A* gira en el plano *R* (fig. 268, *b*) paralelo al plano *H* y que corta a la superficie dada según un arco de la espiral de Arquímedes. Construimos la proyección horizontal de este arco, trazando, para hallar los puntos *3* y *6*, los planos P_1 y P_2 por el eje de la superficie. Estos planos cortan a la superficie según sus generatrices *1—2* y *4—5*. Hallamos los puntos *3'* y *6'* en la intersección de la traza R_v con *1'2'* y *4'5'*, y con ayuda de estos construimos las

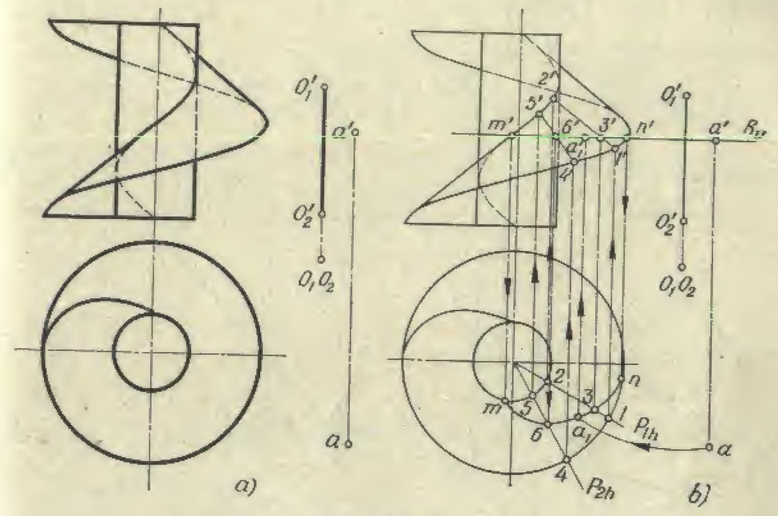


Fig. 268a, b.

proyecciones *3* y *6*. Trazamos por los puntos *m*, *6*, *3* y *n* una curva y hallamos el punto de intersección (a_1) de esta curva con la proyección horizontal de la circunferencia descrita por el punto *A*. Con auxilio del punto a_1 hallamos a_1'; a_1 y a_1' son las proyecciones del punto *A* en la posición buscada.

286. Mediante el giro alrededor del eje O_1O_2 abatir el punto *A* sobre: a) una superficie helicoidal (fig. 269, *a*); b) un plano oblicuo (fig. 269, *b*) dado por las directrices rectilíneas *CD* y *EF* y el plano de paralelismo *H*.

287*. Indicar las posiciones de los ejes, perpendiculares al plano *H*, mediante el giro alrededor de los cuales se puede colocar el punto *A* sobre la superficie de revolución dada (fig. 270, *a*).

Solución. A diferencia de los problemas 283 y 285, en el problema en cuestión, el eje para el giro del punto no se fija; se acuerda solamente que este eje debe ser perpendicular al plano *H*. Sin embargo, no se puede tomar cualquier recta perpendicular al plano *H*, y aceptarla como eje, útil para la resolución de este problema.

En la fig. 270, *b* se muestra, que existe tal zona, en la que sería inútil tomar puntos en calidad de proyecciones horizontales de los ejes de giro. Por ejemplo, tomando el punto O_4 como proyección horizontal del eje, obtendremos el radio de giro del punto *A* igual a O_4a, pero O_4a es menor que la distancia desde el punto *a* hasta el punto más cercano en la circunferencia de radio *R* y, por consiguiente, el arco de radio O_4a incluso no hará contacto con esta circunferencia. O bien el punto O_5: es absolutamente evidente que el arco de radio O_5a no puede tener puntos comunes con la circunferencia de radio *R*.

Pero si tomamos el punto O_1 de modo tal, que $O_1a=O_11$, o bien el punto O_3 de tal manera que $O_3a=O_33$, entonces, en las posiciones *1* y *3* el punto *a* estará situado sobre la circunferencia de radio *R*. Tomando los ejes que pasan por los puntos O_1 y

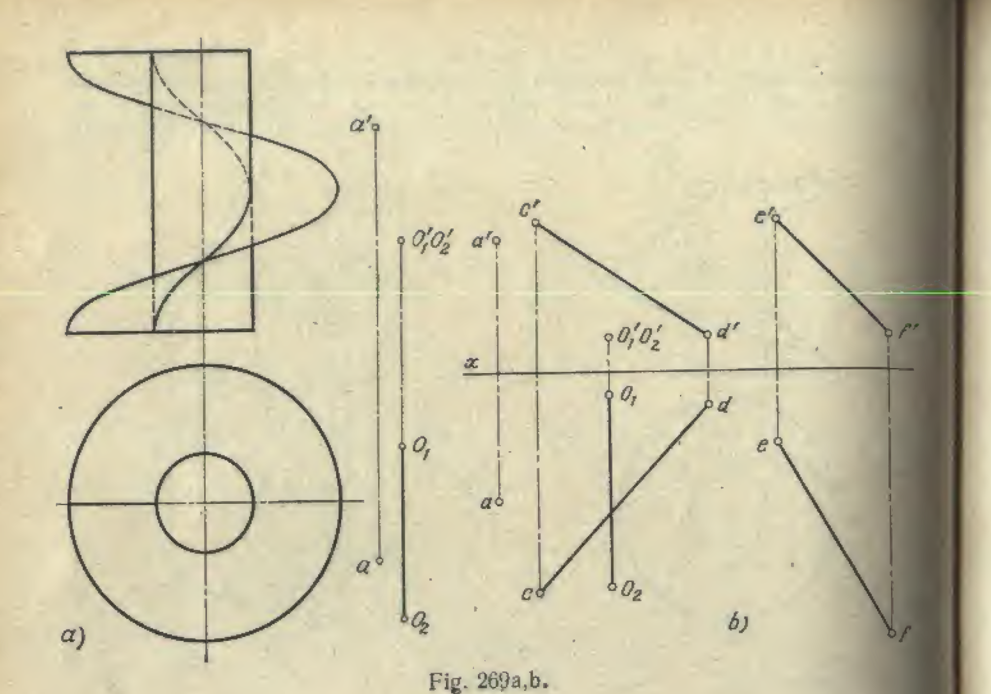


Fig. 269a,b.

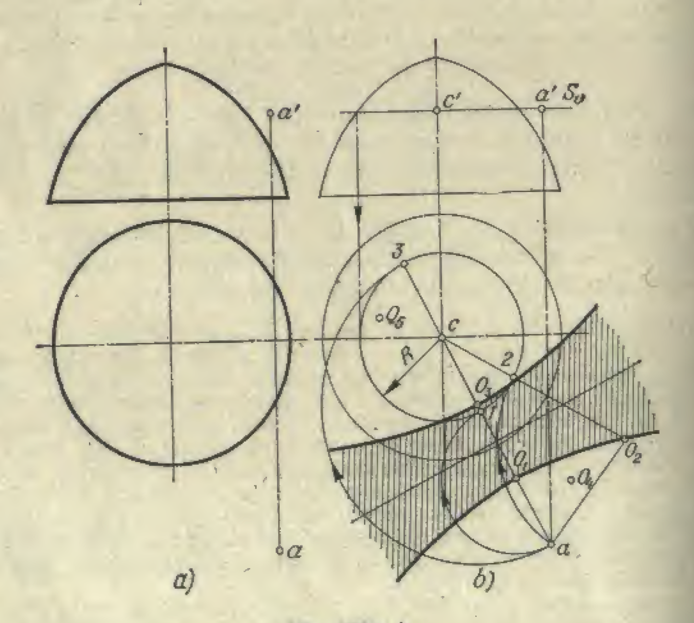


Fig. 270a, b.

O_3 perpendicularmente al plano H, podemos resolver el problema sobre la colocación del punto A en la superficie de revolución dada. Es fácil ver que la resolución se reduce a la construcción de una hipérbola, los focos de la cual son los puntos a y c, y los puntos O_1 y O_3 son sus vértices. Esta hipérbola determina la zona (en la fig. 270, b está rayada) en la que cualquier punto puede ser tomado en calidad de proyección horizontal del eje, durante el giro alrededor del cual el punto A se encontrará en dos posiciones sobre la superficie de revolución dada. Si se toma el punto en una de las ramas de la hipérbola, entonces este punto determina el eje, durante el giro alrededor del cual el punto A se encontrará sobre la superficie de revolución en una sola posición. Por ejemplo, el punto O_2: el arco de radio O_2a sólo tendrá contacto en el punto 2 con la circunferencia de radio R.

288. Indicar la posición de los ejes, perpendiculares al plano H, mediante el giro alrededor de los cuales se puede abatir el punto A sobre la superficie de revolución dada (fig. 271).

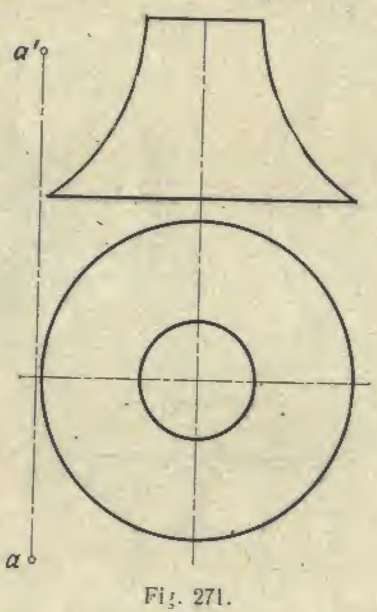


Fig. 271.

289*. Indicar la posición de los ejes, perpendiculares al plano H, mediante el giro alrededor de los cuales se puede abatir el punto A sobre la superficie de revolución dada (fig. 272, a).

Solución. La diferencia de este problema del problema 287* consiste en que el punto viene dado dentro de la superficie de revolución. Aquí la elección de las posiciones de los ejes se resuelve también al examinar la posición recíproca del punto A y la circunferencia de radio R (el paralelo) sobre la superficie de revolución (fig. 272, b). Es obvio que la proyección horizontal del eje de giro (un punto cualquiera O) deberá estar situada de tal modo que el radio Oa sea no menor que la distancia desde el punto O hasta el punto más cercano de la circunferencia de radio R. Las posiciones extremas del punto O (por ejemplo, O_1, O_2 y otras) se dispondrán como los puntos de una elipse con focos en los puntos a y c, con el eje mayor O_1O_3 sobre la recta $1—3$. El punto O_1 divide por la mitad al segmento $a—1$, y el punto O_3, al segmento $a—3$. Si se toman los puntos dentro de esta elipse y se aceptan como proyecciones horizontales de los ejes de giro, entonces

mediante el giro alrededor de tales ejes se puede abatir el punto dado sobre la superficie de revolución. Las proyecciones horizontales de los ejes deben tomarse sobre la elipse o fuera de ésta.

290. Indicar las posiciones de los ejes, perpendiculares al plano H, mediante el giro alrededor de los cuales se puede abatir el punto A sobre la superficie de revolución dada (fig. 273).

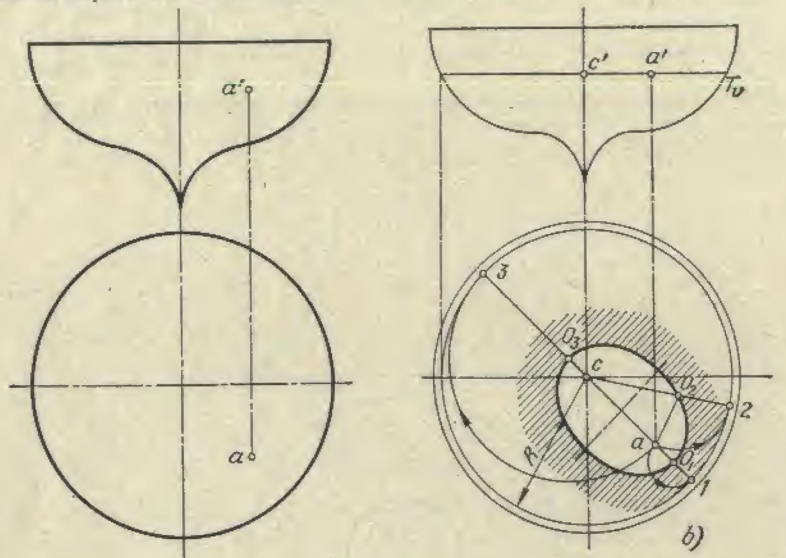


Fig. 272a, b.

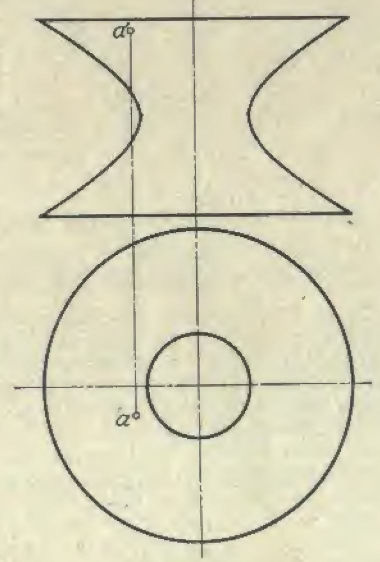


Fig. 273.

291*. Hallar sobre la recta CD los puntos que se encuentran a la distancia l de la recta AB (fig. 274, *a*).

Solución. El lugar geométrico de los puntos del espacio que se encuentran a la distancia l de la recta AB, es una superficie cilíndrica con eje AB y radio l (fig. 274, *b*). Los puntos buscados M y K son los puntos de intersección de la recta CD con dicha superficie.

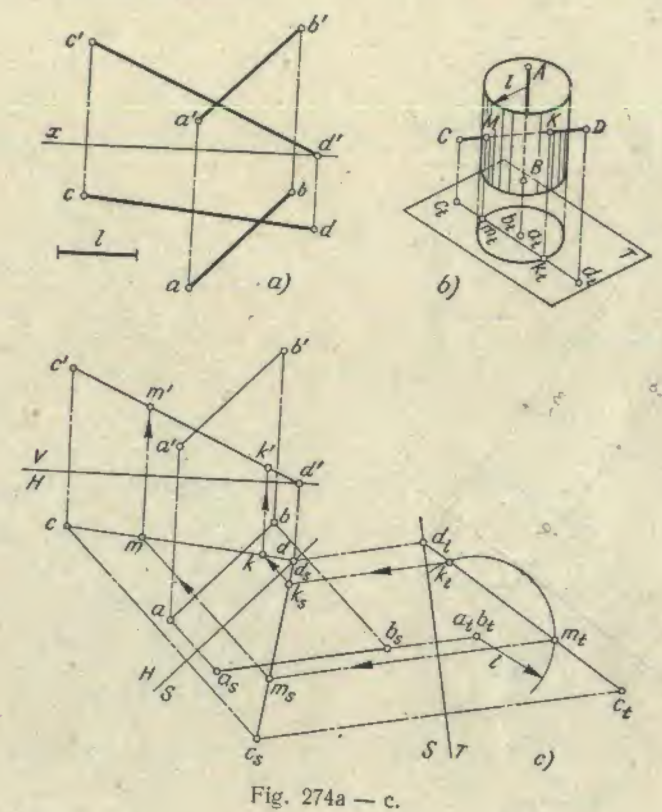


Fig. 274a — c.

Evidentemente, para simplificar la construcción, hay que proceder de tal manera que el eje de la superficie cilíndrica sea perpendicular a un plano cualquiera tomado como plano de proyección. Primero (fig. 274, *c*) introducimos el plano $S \perp H$ y paralelo a la recta AB, y luego, el plano $T \perp S$ y perpendicular a AB. En el sistema T, S la recta AB es perpendicular al plano T. La proyección de la superficie cilíndrica sobre este plano es la circunferencia de radio l con centro en el punto $a_t(b_t)$. Los puntos de intersección (m_t y k_t) de la circunferencia con la proyección c_td_t son las proyecciones de los puntos buscados sobre el plano T. Con auxilio de m_t y k_t hallamos m_s y k_s, y luego m y k, y con ayuda de estos últimos, m' y k'.

292. Hallar sobre la recta AB los puntos que se encuentran a la distancia l del eje x (fig. 275).

293*. Construir la proyección que falta de la recta CD paralela a la recta AB, si la distancia entre estas rectas es igual a l (fig. 276, *a*).

Solución. Las líneas rectas, paralelas a AB y que se encuentran a la distancia l de esta recta, son las generatrices de un cilindro, como eje del cual sirve la recta AB, y el radio de la sección normal del cual es el segmento l. Partiendo de que hay que conseguir que la recta AB sea perpendicular a cierto plano: el cilindro con eje AB se representará sobre este plano en forma de circunferencia, sobre la cual se encontrará la proyección correspondiente de la recta CD.

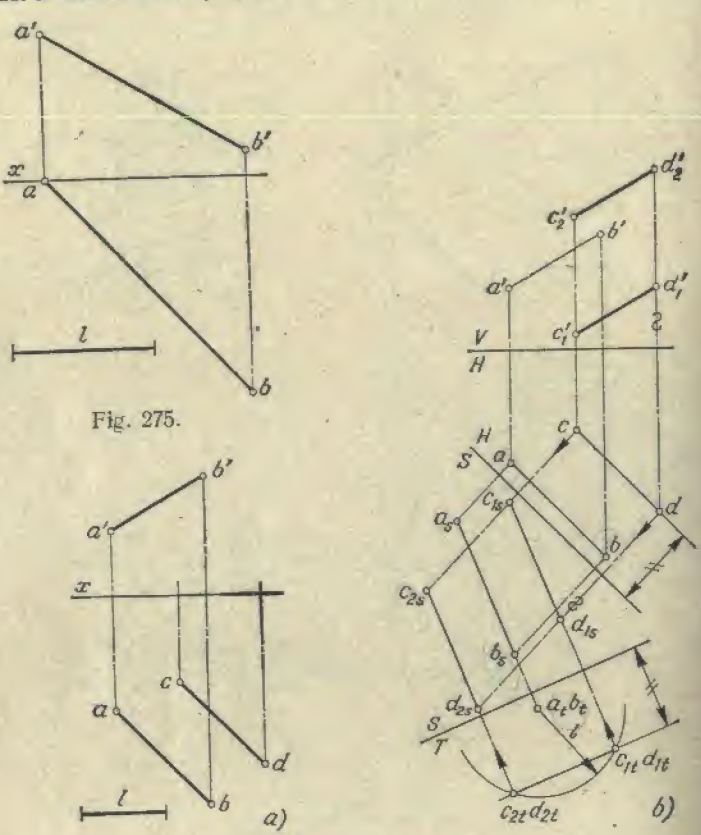


Fig. 275.

Fig. 276a, b.

La construcción se muestra en la fig. 276, *b*. Sucesivamente se han introducido los planos $S \perp H$ y $T \perp S$, con la particularidad de que $S \| AB$ y $T \perp AB$. Hallando el punto $a_t(b_t)$ (la proyección de AB sobre el plano T) describimos el arco de radio l. Este arco es la proyección del cilindro, una de cuyas generatrices deberá ser la recta CD, sobre el plano T. La proyección de la recta CD sobre el plano T deberá ser un punto perteneciente al arco descrito y que se encuentra a la distancia del eje T/S igual a la distancia de la proyección cd al eje S/H. Obtenemos dos puntos: c_{1t} (d_{1t}) y c_{2t} (d_{2t}), es decir, dos respuestas: ambas rectas responden a los datos del problema. Una vez halladas las proyecciones C_{1t} (d_{1t}) y $c_{2t}(d_{2t})$, trazamos $c_{1s}d_{1s} \| a_sb_s$ y $c_{2s}d_{2s} \| a_sb_s$ y luego, $c_1'd_1' \| a'b' \| c_2'd_2'$.

294. Construir la proyección horizontal de la recta CD, paralela a la recta AB y que se encuentra a la distancia l de esta última (fig. 277).

295*. Hallar en el triángulo ABC un punto, que se encuentra a la distancia l de las rectas AB y EF (fig. 278, *a*).

Solución. El lugar geométrico de los puntos en el plano del triángulo, que se encuentran a la distancia l de la recta AB es una recta paralela a AB y trazada a

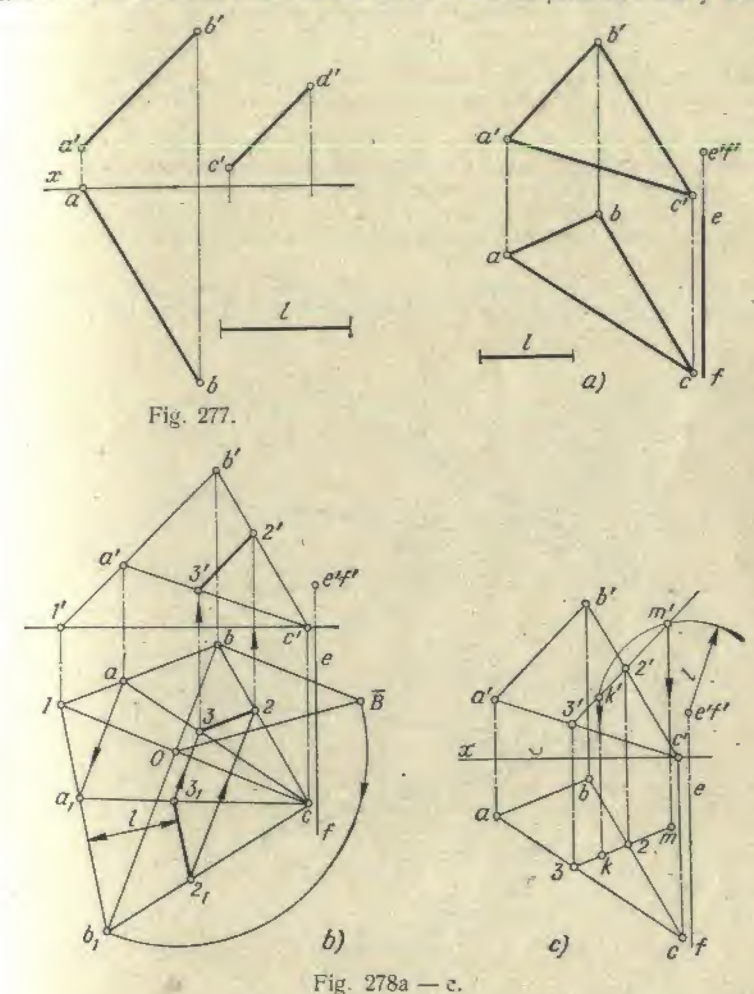


Fig. 277.

Fig. 278a — c.

la distancia l de ésta. Tales rectas pueden ser dos: limitémonos a aquella que se encuentra en los límites del triángulo ABC. En la fig. 278, *b*, el triángulo ABC ha sido girado alrededor de la horizontal hasta colocarlo paralelamente al plano H. La horizontal se ha trazado por el punto C. Se ha hallado la magnitud verdadera del radio de giro del punto B (el segmento $\overline{OB}$) y la posición A_1B_1C del triángulo ABC, en la que su plano es paralelo al plano H.

Trazando la recta 2_13_1 paralelamente a a_1b_1 a la distancia l, hallamos los puntos 2 y 3, y con ayuda de éstos, $2'$ y $3'$ sobre las proyecciones de los lados correspondientes del triángulo.

Pasamos a la segunda condición, relacionada con la recta EF.

Solución. Las líneas rectas, paralelas a AB y que se encuentran a la distancia l de esta recta, son las generatrices de un cilindro, como eje del cual sirve la recta AB, y el radio de la sección normal del cual es el segmento l. Partiendo de que hay que conseguir que la recta AB sea perpendicular a cierto plano: el cilindro con eje AB se representará sobre este plano en forma de circunferencia, sobre la cual se encontrará la proyección correspondiente de la recta CD.

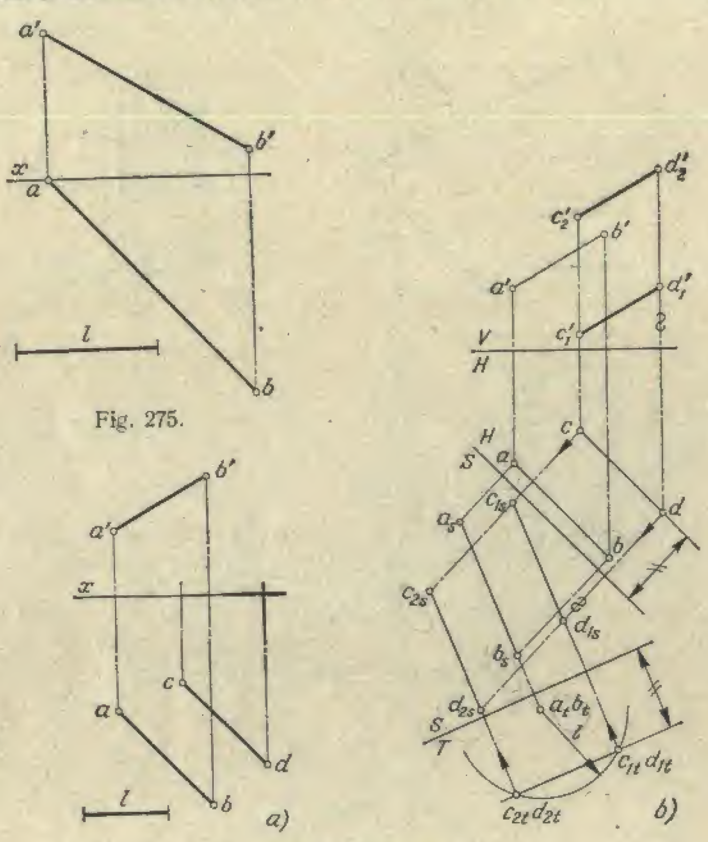


Fig. 275.

Fig. 276a, b.

La construcción se muestra en la fig. 276, *b*. Sucesivamente se han introducido los planos $S \perp H$ y $T \perp S$, con la particularidad de que $S \| AB$ y $T \perp AB$. Hallando el punto $a_t(b_t)$ (la proyección de AB sobre el plano T) describimos el arco de radio l. Este arco es la proyección del cilindro, una de cuyas generatrices deberá ser la recta CD, sobre el plano T. La proyección de la recta CD sobre el plano T deberá ser un punto perteneciente al arco descrito y que se encuentra a la distancia del eje T/S igual a la distancia de la proyección cd al eje S/H. Obtenemos dos puntos: c_{1t} (d_{1t}) y c_{2t} (d_{2t}), es decir, dos respuestas: ambas rectas responden a los datos del problema. Una vez halladas las proyecciones C_{1t} (d_{1t}) y $c_{2t}(d_{2t})$, trazamos $c_{1s}d_{1s} \| a_sb_s$ y $c_{2s}d_{2s} \| a_sb_s$ y luego, $c'_1d'_1 \| a'b' \| c'_2d'_2$.

294. Construir la proyección horizontal de la recta CD, paralela a la recta AB y que se encuentra a la distancia l de esta última (fig. 277).

295*. Hallar en el triángulo ABC un punto, que se encuentra a la distancia l de las rectas AB y EF (fig. 278, *a*).

Solución. El lugar geométrico de los puntos en el plano del triángulo, que se encuentran a la distancia l de la recta AB es una recta paralela a AB y trazada a

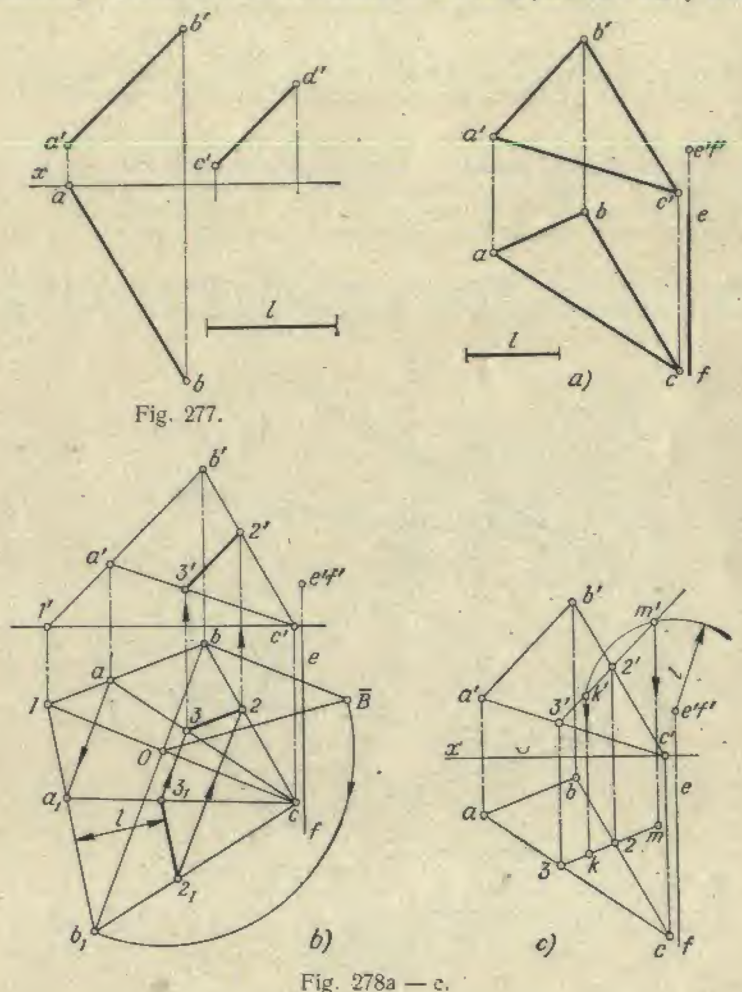


Fig. 277.

Fig. 278a — c.

la distancia l de ésta. Tales rectas pueden ser dos: limitémonos a aquella que se encuentra en los límites del triángulo ABC. En la fig. 278, *b*, el triángulo ABC ha sido girado alrededor de la horizontal hasta colocarlo paralelamente al plano H. La horizontal se ha trazado por el punto C. Se ha hallado la magnitud verdadera del radio de giro del punto B (el segmento $\overline{OB}$) y la posición A_1B_1C del triángulo ABC, en la que su plano es paralelo al plano H.

Trazando la recta 2_13_1 paralelamente a a_1b_1 a la distancia l, hallamos los puntos 2 y 3, y con ayuda de éstos, $2'$ y $3'$ sobre las proyecciones de los lados correspondientes del triángulo.

Pasamos a la segunda condición, relacionada con la recta EF.

El lugar geométrico de los puntos del espacio que se encuentran a la distancia l de la recta EF, es una superficie cilíndrica con el eje EF y radio l. El punto de intersección de esta superficie con la recta 2—3 es el punto buscado. Tales puntos pueden ser dos. Pero, en los límites del triángulo dado, como esto se desprende del examen de la fig. 278, *c*, se obtiene un solo punto, el punto K.

Puesto que $EF \perp V$, obtenemos directamente la traza frontal de la superficie cilíndrica en forma de un arco de circunferencia con centro $e'(f')$ y radio l. En la intersección de este arco con la proyección $2'3'$ se obtiene el punto k', que es la proyección frontal del punto buscado que se encuentra a la distancia l de las rectas AB y EF.

En la fig. 278, *c* se muestra también el punto M, que responde a las condiciones del problema sobre la equidistancia de AB y EF (a la distancia l). El punto M se encuentra en el plano dado por el triángulo ABC, pero fuera de los límites de este triángulo. En las condiciones del problema se dice: «En el triángulo dado...». Por esta razón, totalmente responde a las condiciones del problema solamente el punto K.

296. Hallar en el triángulo dado un punto, que se encuentra a la distancia l_1 de la recta AB, y a la distancia l_2 de la recta EF (fig. 279).

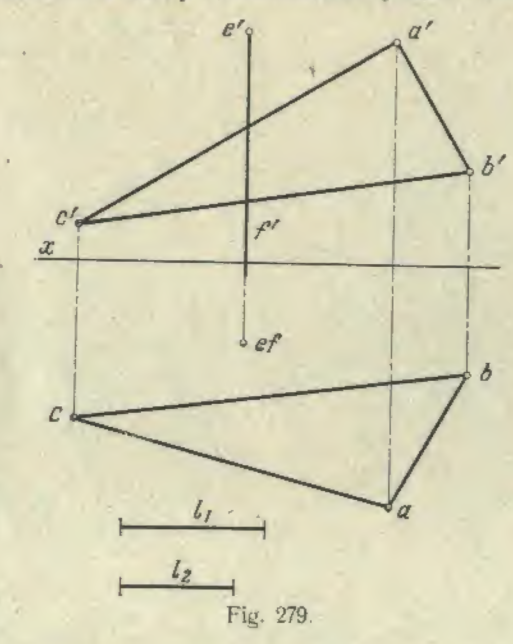


Fig. 279.

297*. Trazar la recta MN, equidistante de las rectas AB, CD y EF y paralela a una de ellas, a saber: a la recta CD (fig. 280, *a*).

Solución. Supongamos que la recta CD está situada perpendicularmente a cierto plano de proyección; en este caso, toda recta paralela a CD también será perpendicular a este plano, incluyendo la recta buscada. En el caso dado, la recta CD es paralela al plano V, por eso, se puede introducir inmediatamente el plano S, perpendicular a la recta CD, tomando el eje $S/V \perp c'd'$ (fig. 280, *b*). Construimos las proyecciones a_sb_s, $c_s(d_s)$ y e_sf_s. La proyección de la recta buscada MN sobre el plano S representa un punto $m_s(n_s)$ equidistante de las rectas a_sb_s y e_sf_s y del punto $c_s(d_s)$, es decir, es el centro de una circunferencia que pasa por el punto $c_s(d_s)$ y que hace contacto con las rectas a_sb_s y e_sf_s. Para su construcción trazamos la

bisectriz del ángulo a_slf_s y desde cualquier punto O de esta bisectriz trazamos una circunferencia que haga contacto con dichas rectas. Unimos los puntos 1 y $c_s(d_s)$ con una línea recta y hallamos el punto 2 de intersección de la misma con la circunferencia trazada. Ahora trazamos una recta por los puntos O y 2. El punto buscado

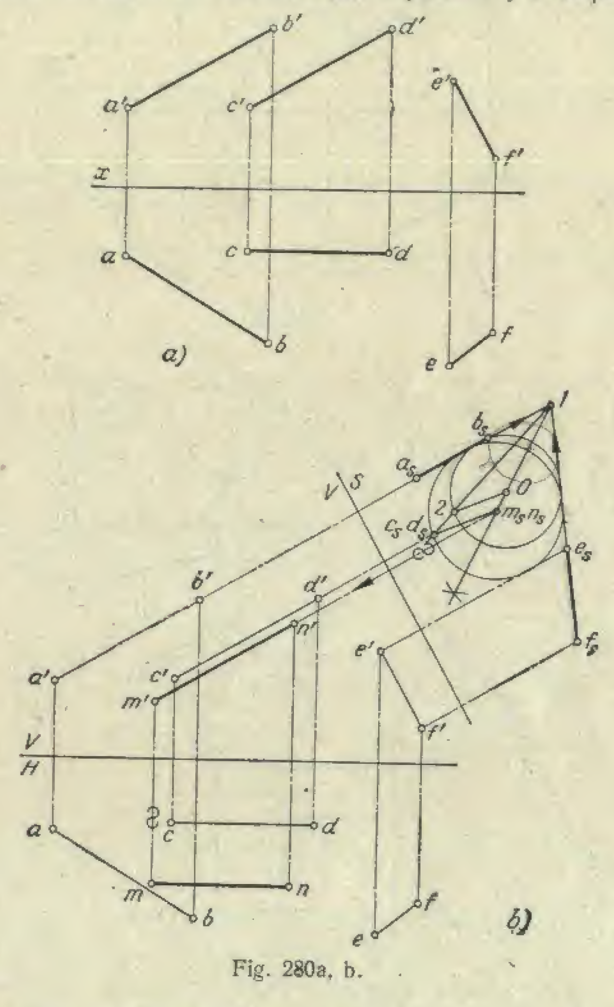


Fig. 280a, b.

$m_s(n_s)$ se encuentra en la intersección de la bisectriz mencionada más arriba con la recta paralela a la recta O—2 y que pasa por el punto $C_s(d_s)$. Con ayuda de la proyección $m_s(n_s)$ hallamos $m'n' \| c'd'$ y $mn \| cd$.

298. Trazar una recta MN equidistante de las rectas AB, CD y EF y paralela a la recta CD (fig. 281).

299*. Trazar una recta MN equidistante de las rectas AB, CD y EF y paralela a la recta GK (fig. 282, *a*).

Solución. También en este problema, evidentemente, hay que hacer de tal manera que la recta CD y, por consiguiente, también la recta buscada MN paralela

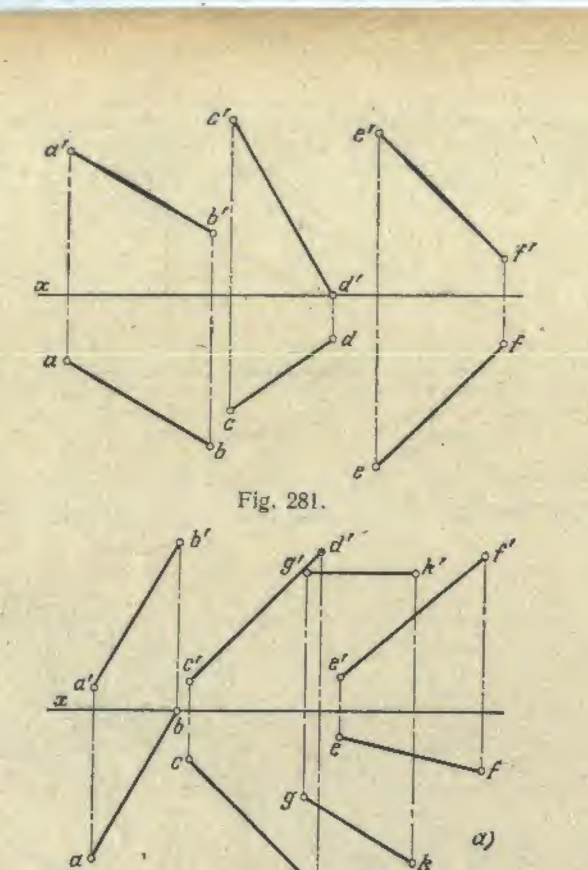


Fig. 281.

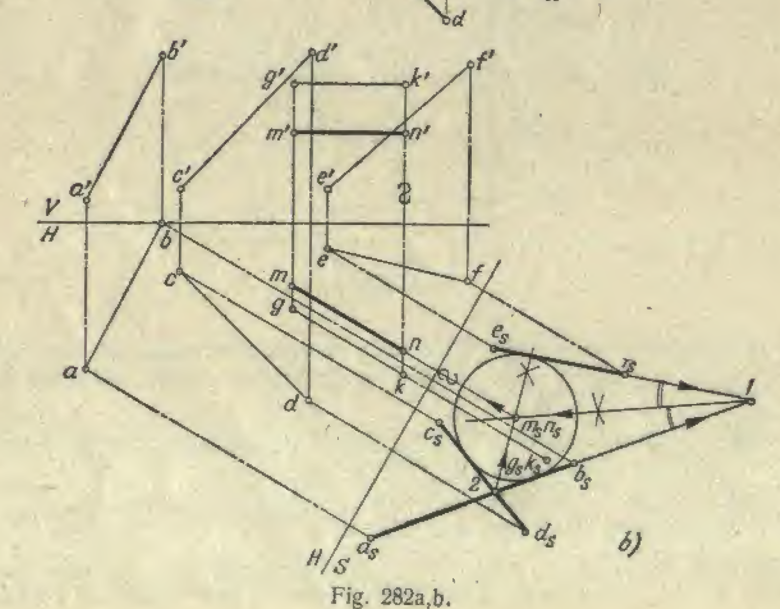


Fig. 282a,b.

a ésta sean perpendiculares a cierto plano de proyección. Puesto que, según las condiciones del problema, GK es paralela al plano H, se puede introducir inmediatamente el plano S (fig. 282, *b*) perpendicular al plano H y a la recta GK.

Ahora construimos las proyecciones $a_s b_s$, $c_s d_s$ y $e_s f_s$. La proyección de la recta buscada sobre el plano S deberá ser un punto. Es obvio que hay que buscar los puntos equidistantes de las proyecciones $a_s b_s$, $c_s d_s$ y $e_s f_s$. Trazando las bisectrices de los ángulos $a_s 1 e_s$ y $c_s 2 b_s$, obtendremos en su intersección el punto $m_s(n_s)$. Este punto será precisamente la proyección de la recta buscada sobre el plano S, que equidista de las rectas AB, CD y EF y que es paralela a la recta GK.

Aquí se da una de las cuatro soluciones posibles.

300. Trazar una recta MN equidistante de las rectas AB, CD y EF y paralela a la recta GK (fig. 283).

Indicación. En el problema 300, para que la recta GK sea perpendicular a cierto plano de proyección, hay que introducir dos planos auxiliares.

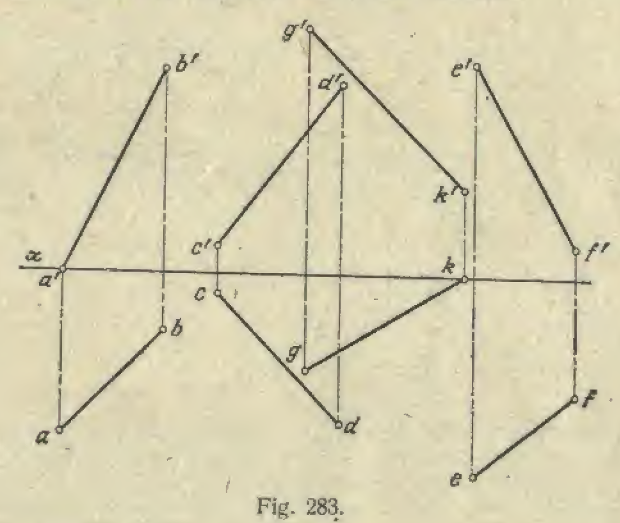


Fig. 283.

301*. Trazar una recta equidistante de los cuatro puntos dados A, B, C y D (fig. 284, *a*).

Solución. Representándonos el cuadro espacial, podemos deducir que la recta buscada es el eje de una superficie cilíndrica, cuyas generatrices pasan por los puntos dados (fig. 284, *b*).

Para construir esta superficie trazamos por dos puntos cualesquiera de los cuatro dados, por ejemplo, por A y B, una recta y la aceptamos como generatriz de la superficie cilíndrica. Ahora trazamos el plano T perpendicularmente a la recta AB y hallamos las proyecciones $a_t(b_t)$, c_t y d_t. La proyección de la superficie cilíndrica sobre el plano T es una circunferencia que pasa por los puntos c_t, d_t y $a_t(b_t)$. El centro de esta circunferencia [el punto $m_t(n_t)$] es la proyección de la recta buscada.

La construcción se muestra en la fig. 284, *c*. Introducimos el plano $S \perp H$ y paralelo a la recta AB, y luego el plano T perpendicular al plano S y a AB. Construidas las proyecciones $a_t(b_t)$, c_t y d_t, hallamos el punto m_t (la proyección de uno de los puntos (M) de la recta buscada MN).

Luego hallamos m_s, m y m'. Trazamos $m'n' \| a'b'$ y $mn \| ab$.

Se podrían haber unido los puntos A y C, A y D, B y C, B y D, C y D y obtener cinco soluciones más.

302. Trazar una recta MN equidistante de cuatro puntcs dados A, B, C y D (véase la fig. 284, *a*). Dar dos variantes de resolución: a) $MN \parallel BD$ y b) $MN \parallel AC$.

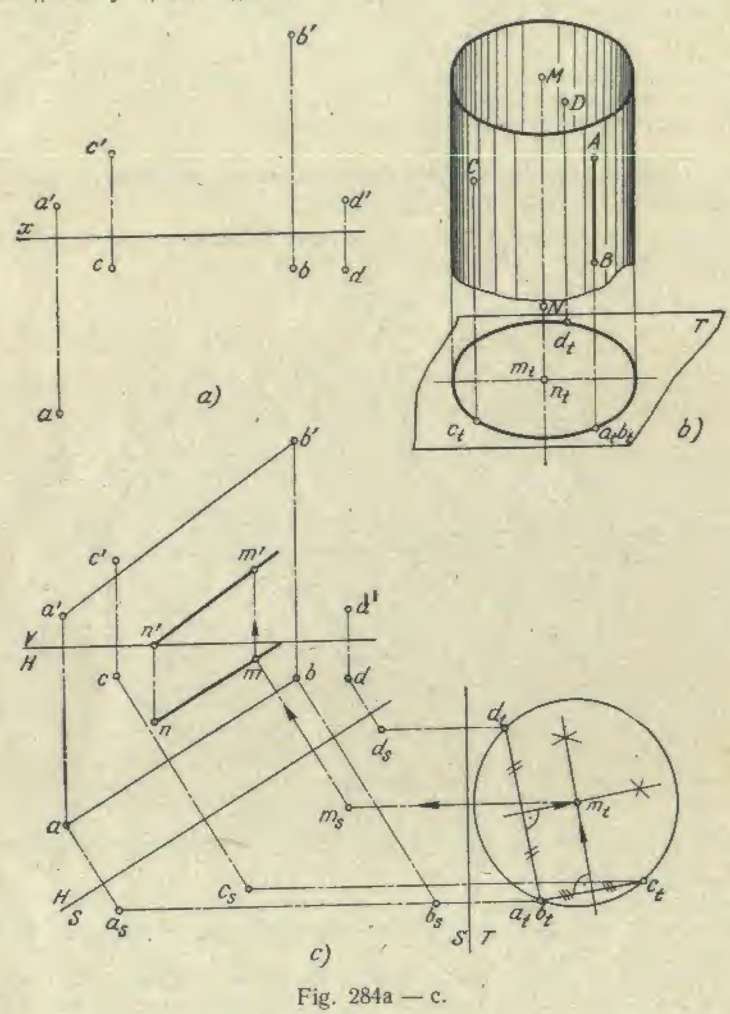


Fig. 284a — c.

303*. Construir la proyección frontal del triángulo ABC, si están dadas su proyección horizontal abc y la horizontal DC, y se conoce la distancia l desde el punto k hasta el plano de este triángulo (fig. 285, *a*).

Solución. Si nos imaginamos una esfera de radio l como el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a la distancia l del punto K, entonces, el plano buscado será uno de los planos tangentes a esta esfera. En este caso, si el plano es un plano proyectante frontal, su traza frontal será una recta tangente a la proyección frontal de la esfera (la circunferencia de radio l) y la proyección frontal del triángulo ABC coincidirá con esta tangente.

Por esta razón, transformemos el dibujo dado de modo tal, que el plano del triángulo ABC sea un plano proyectante frontal. Para ello empleamos el giro del triángulo y el punto K alrededor de un eje perpendicular al plano H, sin mostrar la posición de este eje (método de desplazamiento paralelo). Durante este giro (fig. 285, *b*), la proyección horizontal, en total, sólo cambiará su posición respecto del eje x. Pero, para que el plano del triángulo ABC sea un plano proyectante frontal, hay que colocar la horizontal DC perpendicularmente al plano V, es decir, hay que llevar la proyección dc a la posición $d_1c_1 \perp$ eje x.

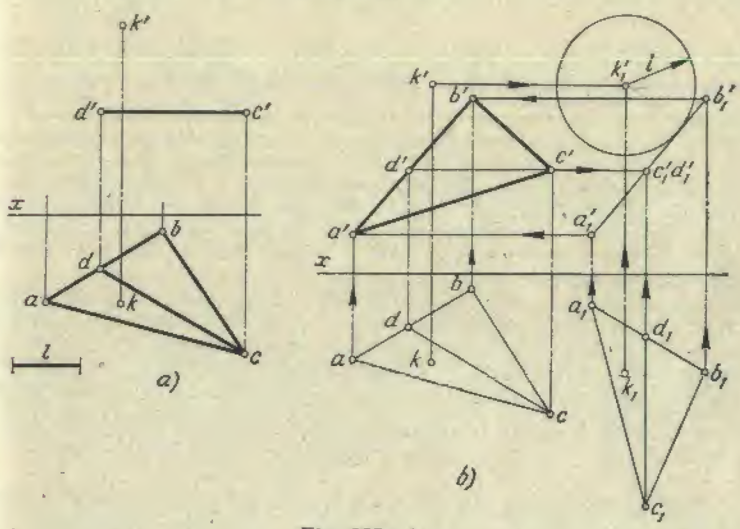


Fig. 285a, b.

Ahora, describiendo desde el punto k_1 una circunferencia de radio l, podemos trazar por el punto $c_1'(d_1')$ una tangente a la circunferencia. En la fig. 285, *b* se ha trazado una sola tangente, aunque se puede trazar una más, es decir, dar la segunda solución. Pero, puesto que la metodología de la construcción no varía, nos limitamos a una sola solución, aceptando como proyección frontal del triángulo el segmento $a_1'b_1'$. Los puntos a_1' y b_1' se determinan con ayuda de los puntos a_1 y b_1.

En conclusión queda volver a las proyecciones dadas abc, k y k', y obtener las proyecciones a' y b', partiendo de las proyecciones construidas a_1' y b_1', es decir, obtener la proyección frontal $a'b'c'$.

304. Construir la proyección horizontal del triángulo ABC, si vienen dadas su proyección frontal $a'b'c'$ y la frontal AD, y, además, se conoce la distancia l desde el punto K hasta el plano de este triángulo (fig. 286). Presentar ambas soluciones.

305*. Trazar por el punto S una recta que forma con las rectas dadas AB, CD y EF un mismo ángulo (fig. 287, *a*).

Solución. La recta buscada es el eje del cono con vértice S, tres generatrices del cual son paralelas a las rectas AB, CD y EF respectivamente (fig. 287, *b*).

Trazamos por s' y s (fig. 287, *c*) las proyecciones de las rectas paralelas a las dadas (por ejemplo, $s'1' \parallel a'b'$, $s-1 \parallel ab$, $s'2' \parallel c'd'$, etc).

Tomando sobre la recta $S-1$ cierto segmento SM (fig. 287, *d*), llevamos sobre las otras dos rectas los segmentos $SK=SN=SM$.

Los puntos K, M y N determinan (fig. 287, *b*) la sección producida en el cono por un plano perpendicular a su eje.

Una vez obtenidos los puntos k, k'; m, m'; n, n', construimos los triángulos kmn y $k'm'n'$, que son las proyecciones del triángulo KMN en cuyo plano hay que hallar un punto equidistante de los puntos K, M y N, o sea, el centro de la circunferencia circunscrita a este triángulo. Trazando una recta por este punto y por el punto S se puede obtener el resultado requerido. Pero, basta trazar una perpendicular desde el punto S al plano determinado por el triángulo KMN, cosa que se ha hecho en la fig. 287, *e* con ayuda de la horizontal M—7 y la frontal M—8.

306*. Abatir la recta AB sobre el plano P, mediante el giro alrededor de un eje perpendicular al plano H (fig. 288, *a*).

Solución. Si se halla el punto de intersección de la recta AB con el plano P, queda girar sólo un punto de la recta de modo tal, que este punto quede situado sobre el plano P. Por eso comenzamos con la determinación del punto S de intersección de la recta AB con el plano P (fig. 288, *b*) y luego trazamos el eje de giro por el punto S perpendicularmente al plano H. Al girar alrededor de este eje, el punto S queda en el plano P y la recta AB describe una superficie cónica. Las líneas de intersección (SA_1 y SA_2) de esta superficie con el plano P (P pasa por el vértice del cono) representan las posiciones buscadas de la recta AB en el plano P.

La construcción se muestra en la fig. 288, *c*. Para hallar el punto S, por la recta AB se ha trazado el plano proyectante frontal R. Durante el giro alrededor del eje OS (fig. 288, *d*), el punto A describe una circunferencia de radio Oa, situada en el plano T, que se corta con el plano P según la horizontal. Esta horizontal corta a la circunferencia en los puntos con las proyecciones a_1 y a_1', a_2 y a_2'. Trazando las rectas $s'a_1'$ y $s'a_1'$, sa_1 y sa_2, hallamos sobre estas rectas la posición de los puntos b_1', b_2', b_1 y b_2. A_1B_1 y A_2B_2 son las posiciones buscadas de la recta AB.

307. Mediante el giro alrededor de un eje perpendicular al plano H (fig. 289), abatir la recta dada AB sobre: a) la cara SDE, b) la cara SCE.

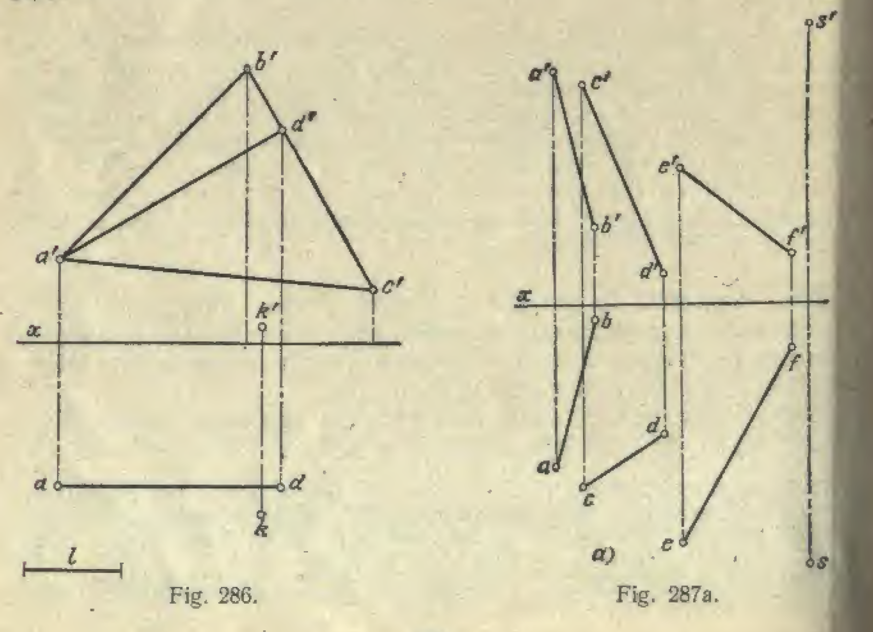


Fig. 286. Fig. 287a.

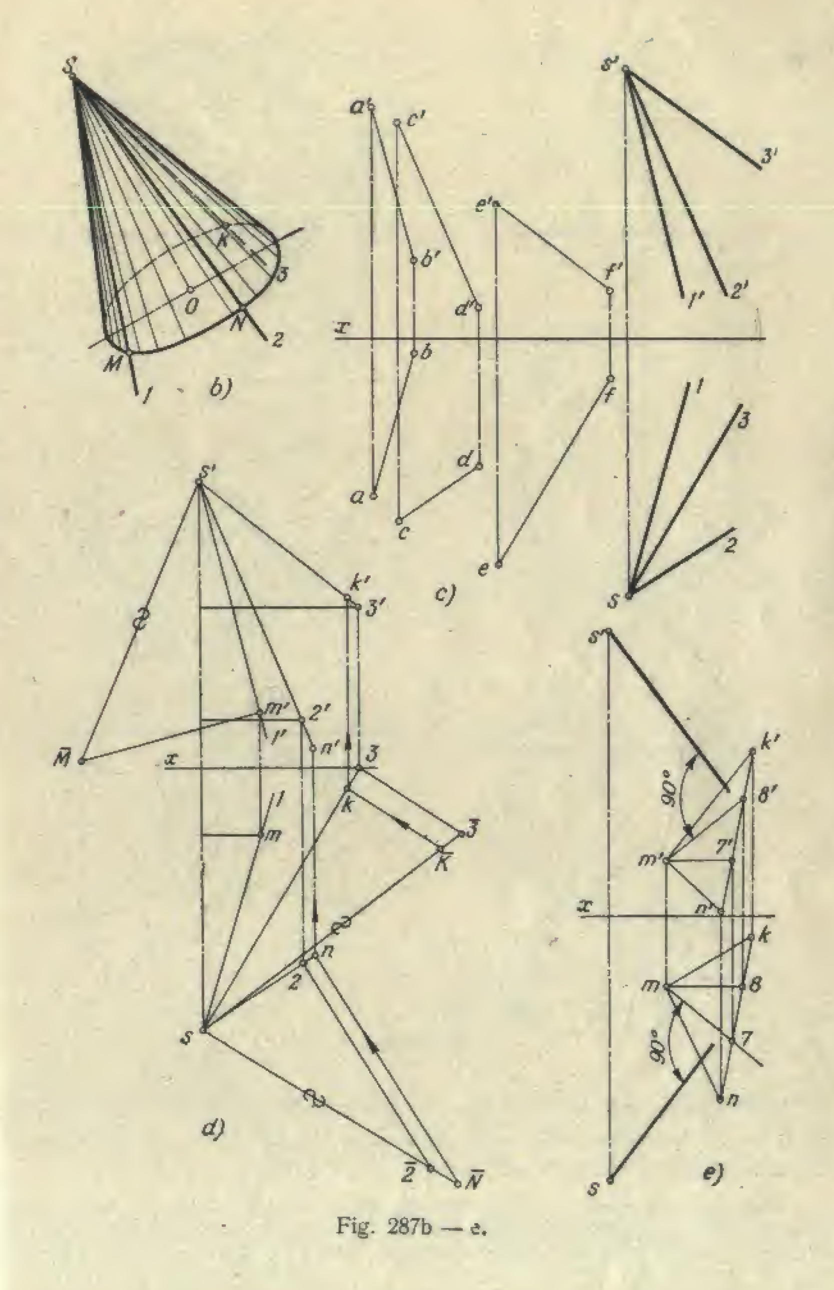


Fig. 287b — e.

Indicación. Comenzar con la determinación del punto de intersección de AB con la cara correspondiente.

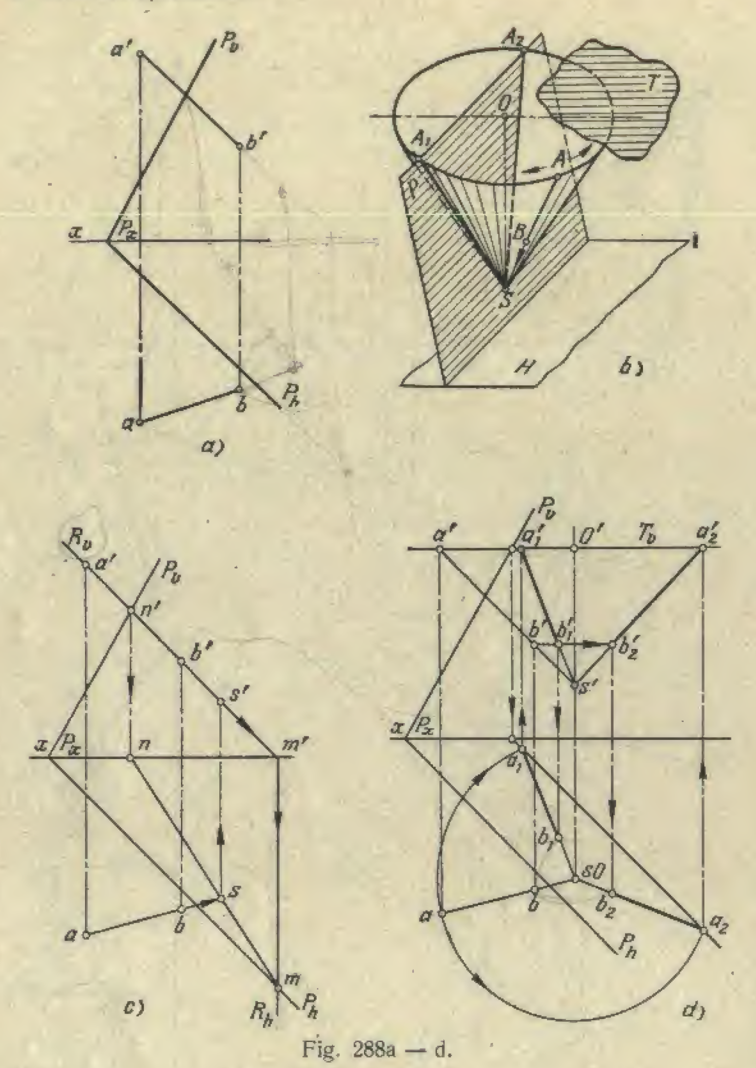


Fig. 288a — d.

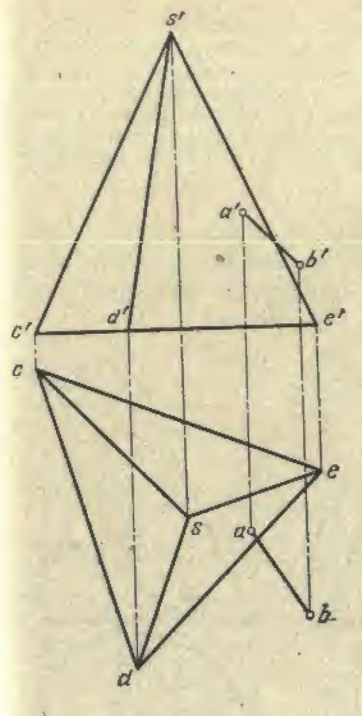
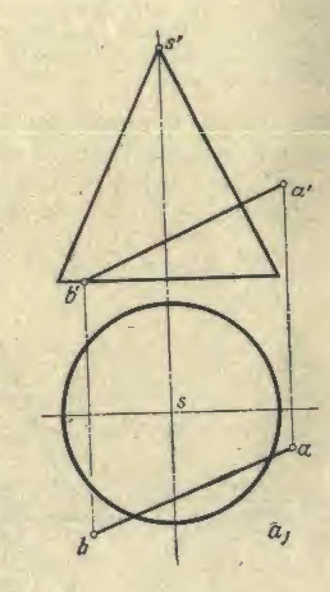
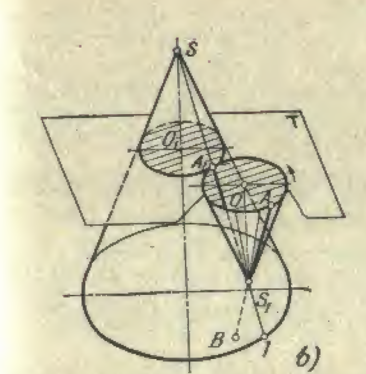


Fig. 289.





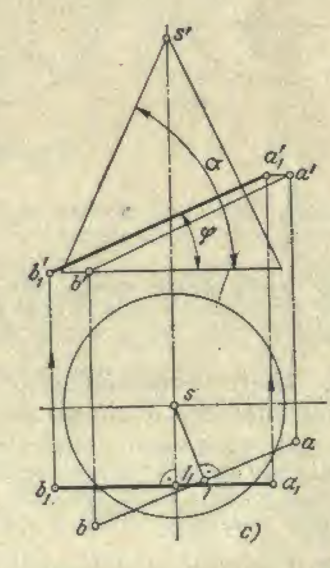


Fig. 290a — c.

308*. Determinar si se puede abatir la recta AB sobre la superficie de un cono de revolución, girándola alrededor de un eje perpendicular al plano de la base del cono (fig. 290, *a*).

Solución. En la fig. 290, *b* se muestra, que la recta AB coincide con la superficie del cono, si coincide con su generatriz en una de sus posiciones. Obtendremos esta posición de la generatriz hallando el punto S_1 de intersección de la recta AB con la superficie del cono. La generatriz $S - I$, determinada por los puntos S y S_1, es precisamente la generatriz con la que debe coincidir la recta AB, si puede ser abatida sobre la superficie del cono. Pero, para que este abatimiento sea posible,

deberán ser iguales entre sí los ángulos formados por la generatriz del cono y la recta dada AB con el eje del cono o con la recta trazada por el punto S_1 paralelamente a este eje. Puesto que en el caso dado el eje del cono es perpendicular al plano H, la verificación se puede reducir a la determinación del ángulo entre la recta AB y el plano H (fig. 290, *c*): aceptando el eje del cono como eje de giro para todo el sistema «cono y recta», giramos la recta AB hasta situarla paralelamente al plano V. Puesto que los ángulos α y φ no son iguales entre sí, la recta AB no puede ser abatida sobre la superficie del cono dado girándola alrededor del eje perpendicular al plano de su base.

309*. Hallar la proyección frontal de la recta AB, partiendo de la condición de que esta recta puede ser abatida sobre la superficie lateral del cono de revolución dado, girándola alrededor de un eje perpendicular al plano de la base de dicho cono (fig. 291, *a*)

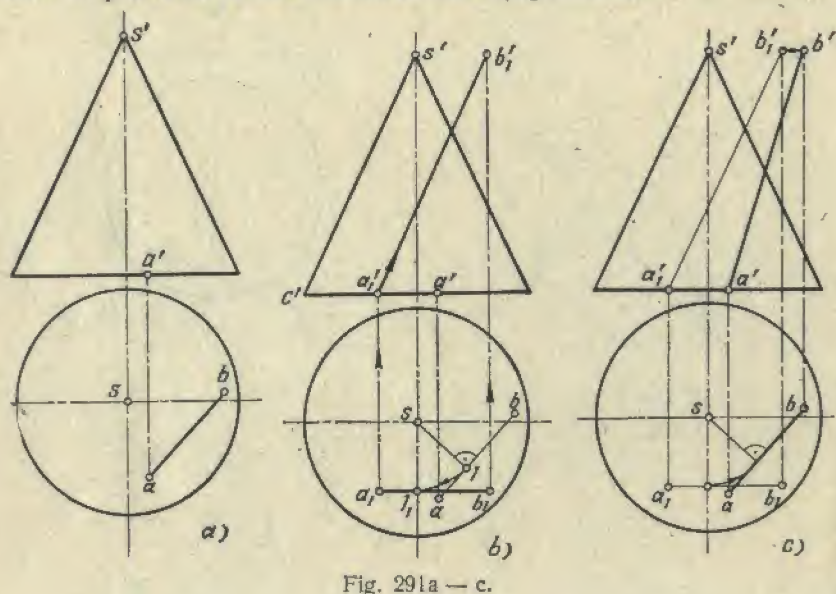


Fig. 291a — c.

Solución. Giremos el sistema «cono y recta» alrededor del eje del cono con el fin de que la recta AB sea paralela al plano V (fig. 291, *b*). Una vez obtenido el punto a_1' (la proyección frontal del punto A después del giro) trazamos $a_1'b_1' \| s'c'$, o sea, obtenemos ángulos iguales entre el eje del cono y: a) su generatriz, b) la recta AB. Llevando el cono y la recta a la posición inicial, obtenemos la proyección frontal $a'b'$ (fig. 291, *c*) en correspondencia con las condiciones del problema.

310. Abatir la recta AB sobre la superficie del cono dado (fig. 292) girándola alrededor de un eje perpendicular al plano de su base.

Indicación. Realizando la verificación y convenciéndose de que el problema puede ser resuelto, hay que hallar el punto de intersección de la recta AB con la superficie lateral del cono. Este punto, junto con el vértice del cono, determina la generatriz del cono en la posición cuando la recta AB coincide con esta generatriz.

311*. Construir la proyección frontal del ángulo AKB, cuya magnitud verdadera es igual a su proyección horizontal akb (fig. 293, *a*).

Solución. Es conocido que la proyección de un ángulo agudo (u obtuso) puede ser igual al ángulo que se proyecta no sólo en el caso en que el plano del ángulo y el plano de proyección son paralelos entre sí. En la fig. 293, *b* se muestra que, por ejemplo, todos los ángulos cuyos lados están situados respectivamente en los planos P y Q perpendiculares al plano H, tienen como proyección horizontal un ángulo igual al ángulo akb. Obviamente, entre diferentes ángulos existe uno igual a esta proyección.

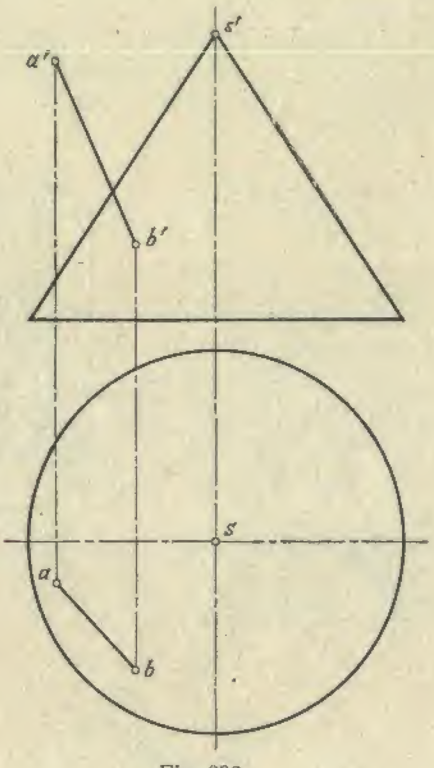


Fig. 292.

A continuación se muestra la construcción de la proyección frontal de un ángulo, cuya magnitud verdadera es igual a su proyección horizontal dada. Esta construcción se ha efectuado por tres procedimientos.

1. Por los lados ak y bk del ángulo akb (fig. 293, *c*) situado en el plano H trazamos dos planos: el plano V y el plano proyectante horizontal S. El ángulo α es el ángulo lineal del ángulo diedro formado por estos planos. Los lados del ángulo, igual a su proyección horizontal, deberán estar situados: uno, sobre el plano V, y el otro, sobre el plano S. Este ángulo se ha construido con ayuda del triángulo AKB, semejante a cierto triángulo MkB, tomado sobre el plano H. La construcción se efectua de tal manera que los lados AB y BM sean afines.

Aceptamos cierto coeficiente de semejanza λ. Elejimos en la arista del ángulo diedro el punto K de modo tal, que $BK=\lambda \cdot Bk$. Si construimos ahora el punto A de modo que $AK=\lambda \cdot Mk$ y $AB=\lambda \cdot BM$, entonces los triángulos AKB y MkB serán semejantes, y el ángulo AKB será igual a α.

Para construir el punto A nos valemos de dos lugares geométricos de puntos: del lugar geométrico en el plano V de los puntos que se encuentran a la distancia

$AK=\lambda \cdot Mk$ del punto K (es decir, una circunferencia trazada desde el punto K con radio $\lambda \cdot Mk$) y del lugar geométrico de los puntos que se encuentran a la distancia $AB=\lambda \cdot BM$ del punto B (es decir, una esfera de radio AB con centro en el punto B). El punto A deberá estar situado sobre el plano V, o sea, deberá pertenecer a la circunferencia según la cual el plano V corta a la esfera indicada y cuyo centro es la proyección frontal del punto B.

En la intersección de las dos circunferencias situadas en el plano V obtenemos dos puntos, uno de los cuales (el punto A) se muestra en la fig. 293, *c*.

El dibujo correspondiente viene dado en la fig. 293, *d*. Tomamos $\lambda=2$. Desde el punto b_0 trazamos un arco de radio $R_1=2kb$ (su construcción está clara del dibujo) hasta su intersección en el punto k' con la línea de referencia que pasa por el punto k. Trazamos por el punto k' un arco de radio $R_2=2km$. Si se traza ahora desde el punto b una circunferencia de radio $R_3=2bm$, obtendremos la proyección de la esfera mencionada más arriba.

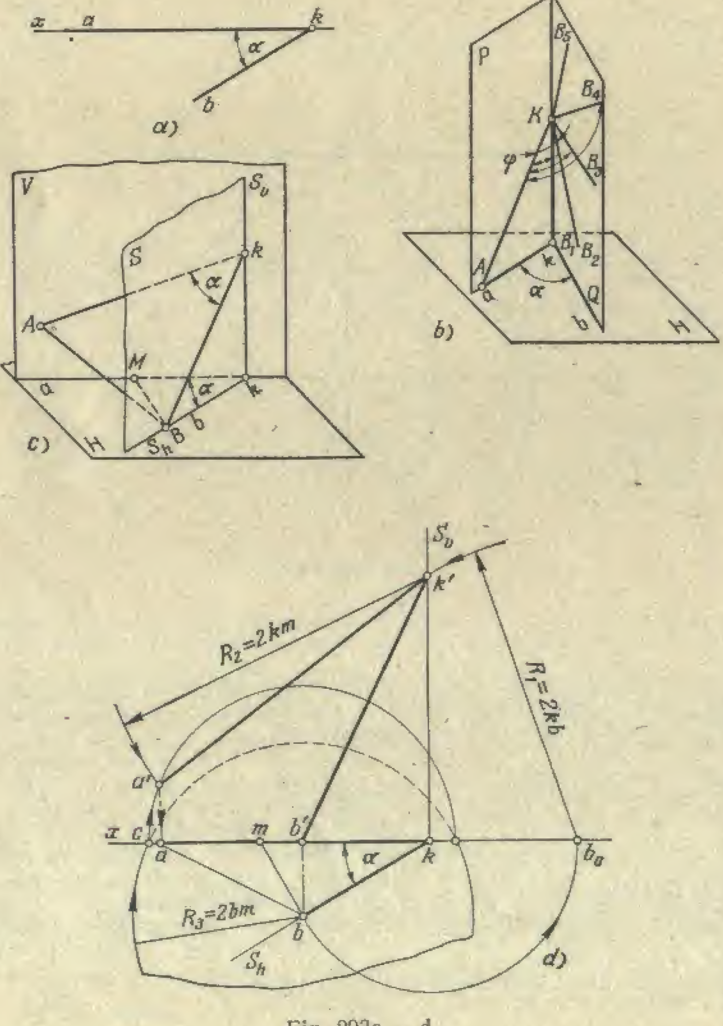


Fig. 293a — d.

La circunferencia, según la cual el plano V corta a esta esfera, tiene su centro en el punto b' y su radio es igual a cb'. El punto a' se encuentra en la intersección de los arcos de radio R_2 y de radio igual a cb', y el punto a, sobre el eje x. El ángulo $a'k'b'$ es la proyección frontal buscada del ángulo igual a su proyección horizontal.

2. Tomemos el punto k (fig. 293, *e*) sobre la arista del ángulo diedro formado por los planos V y P trazados por los lados ak y bk del ángulo akb. Trazamos por este punto, en el plano V, las rectas AK y A_1K, que forman entre sí un ángulo igual a α, y giramos la recta A_1K alrededor de la recta AK. En este caso se engendra una superficie cónica con la generatriz A_1K y el eje AK. La línea KB de intersección de la superficie cónica por el plano P será el lado del ángulo AKB, igual en su magnitud verdadera al ángulo α. Para hallar esta línea de intersección hay que construir la recta *1—2* de intersección del plano P con el plano T de la base del cono. Los puntos C y B de intersección de la circunferencia de la

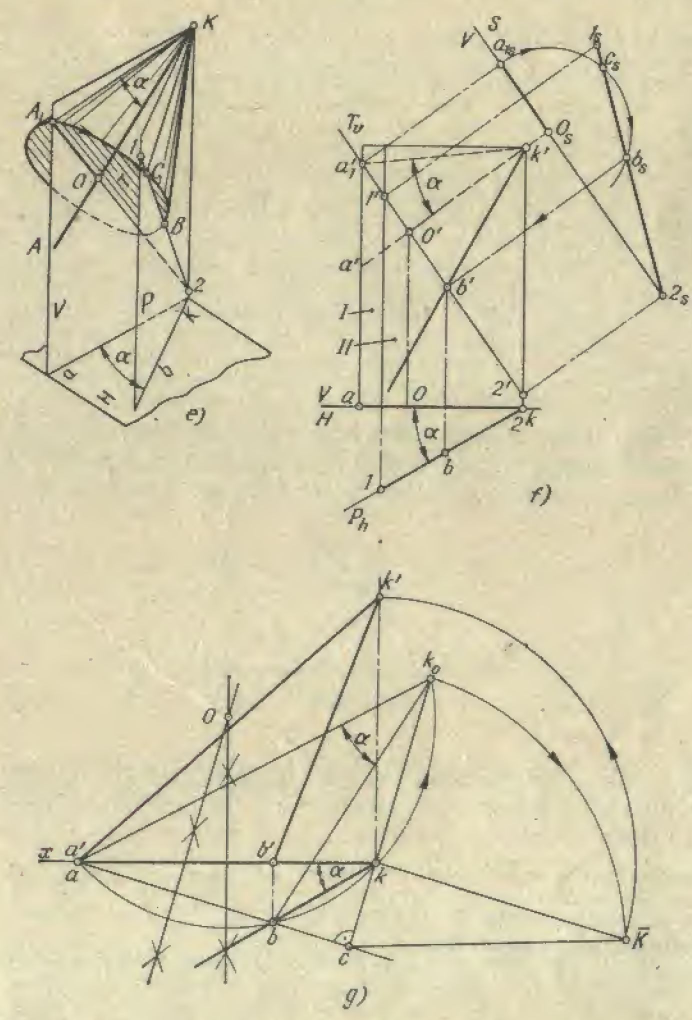


Fig. 293e — g.

base con la recta $1-2$ determinarán las generatrices según las cuales el plano P corta a la superficie cónica.

El dibujo se muestra en la fig. 293, f, con la particularidad de que los planos V y P se muestran en forma de los rectángulos I y II. Por el punto k' en el rectángulo I se han trazado las rectas $a'k'$ y $a_1'k'$ de modo tal, que el ángulo entre ellas sea igual a α. Por el punto a_1', perpendicularmente a $a'k'$, se ha trazado la traza T_v del plano T de la base del cono. El punto $O'O$ es el centro de la circunferencia de la base del cono. La recta con las proyecciones $1'2'$ y $1-2$ es la línea de intersección de los planos T y P.

Introduciendo el plano auxiliar $S \perp V$ y $\perp AK$, construimos las proyecciones O_s y a_{1s}, y también 1_s2_s. La circunferencia descrita desde el punto O_s con radio O_sa_{1s} corta a la recta 1_s2_s en los puntos c_s y b_s, que son las proyecciones de los puntos pertenecientes a las generatrices KB y KC. En la fig. 293, f se muestra la construcción de la proyección frontal del ángulo igual, en verdadera magnitud, al ángulo α.

3. En este caso se ha empleado el abatimiento del plano del ángulo buscado sobre el plano H (fig. 293, g).

Trazamos la recta ab (la traza horizontal del plano en el que está situado el ángulo que se examina) y giramos alrededor de esta recta el punto K hasta abatirlo sobre el plano H. Para que, en este caso, el ángulo aK_0b sea igual a α, hay que inscribir el ángulo aK_0b en una circunferencia trazada por los puntos a, b y k. Entonces, los ángulos akb y aK_0b, como ángulos inscritos, que abarcan un mismo arco, serán iguales entre sí. Queda hallar el punto K_0 en la intersección de la circunferencia trazada por los puntos a, b y k, con la traza del plano de giro del punto K alrededor de la recta ab. Conociendo la magnitud verdadera del radio de giro $c\bar{K}$ del punto K y su proyección horizontal ck, hallamos el segmento $k\bar{K}$ (la elevación del punto K sobre el plano H), lo que nos dará la posibilidad de obtener el punto k'. El ángulo $a'k'b'$ es la proyección frontal buscada del ángulo AKB, igual a su proyección horizontal. En todos los ejemplos nos hemos limitado a mostrar la construcción de un solo ángulo, aunque existe una gran cantidad de ángulos, cuya magnitud verdadera es igual a la proyección horizontal dada.

312. Construir la proyección horizontal del ángulo AKB, cuya magnitud verdadera es igual a su proyección frontal $a'\ k'\ b'$ (fig. 294). Resolver este problema empleando los tres procedimientos.

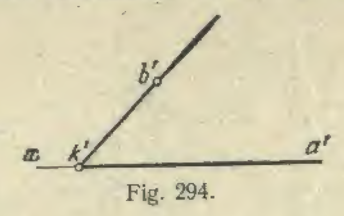


Fig. 294.

313*. Hallar la dirección de la traza frontal de un plano proyectante frontal que corta al cono de revolución dado de modo que la proyección de perfil de la elipse de la sección sea una circunferencia (fig. 295, a).

Solución. En el caso general, la proyección de perfil de la elipse que se obtiene en la intersección de un cono de revolución, representado en la fig. 295, a, por un plano proyectante frontal P, es una elipse (fig. 295, b) cuyos ejes son iguales a las magnitudes de los segmentos $b'4'$ y cd.

Si resulta que $b'4'=cd$, entonces la elipse de la sección se representará sobre el plano W en forma de circunferencia. Esto se puede conseguir si dirigimos la traza P_v del plano buscado por la diagonal del trapecio isósceles $a'e'b'1'$ (fig. 295, b), en el que se inscribe la circunferencia con centro en el punto $2'$. Para construir

dicho trapecio trazamos la bisectriz del ángulo $a'1'b'$ hasta su intersección con el eje de simetría del trapecio en el punto $2'$. Desde este punto trazamos la perpendicular a la bisectriz y hallamos el punto b' (fig. 295, c).

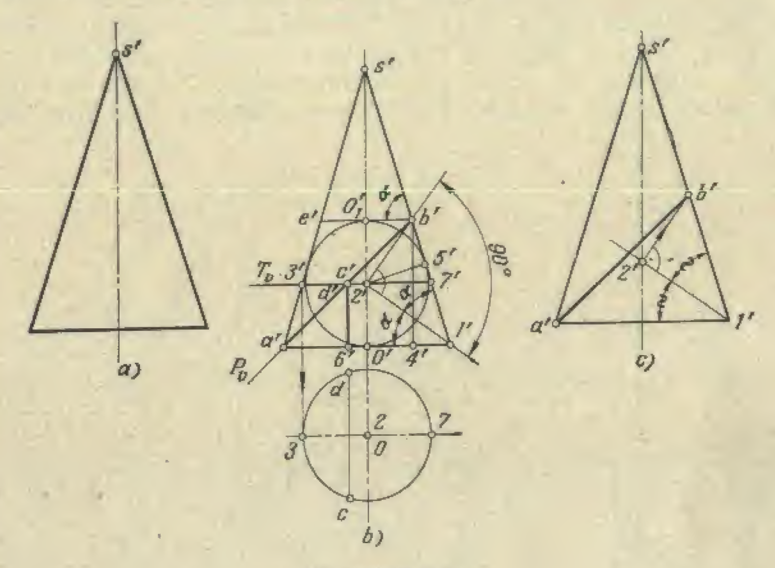


Fig. 295a — c.

314. Viene dada la traza P_h del plano proyectante frontal P que corta a un cono de revolución según una elipse. Construir la traza frontal de este plano partiendo de la condición de que la proyección de perfil de la elipse es una circunferencia (fig. 296).

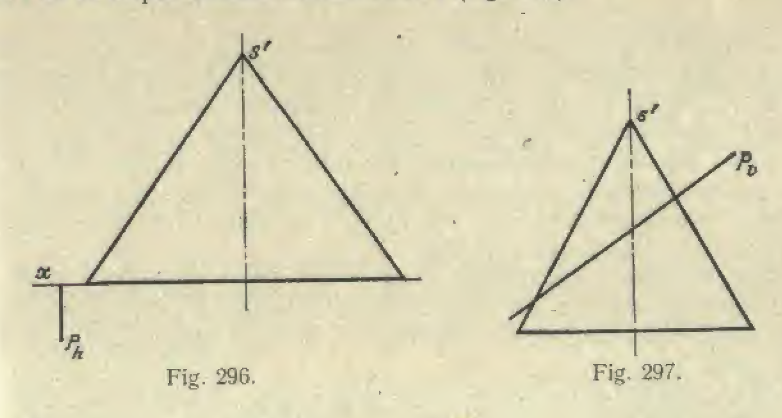


Fig. 296. Fig. 297.

315. ¿Será una circunferencia la proyección de perfil de la elipse (fig. 297) que se obtiene al cortar el cono de revolución dado con un plano proyectante frontal P?

§ 25. PROBLEMAS PARA RESOLUCION INDIVIDUAL

316. Construir las proyecciones del triángulo isósceles ABC con base BC, situado en el plano (fig. 298) dado por la recta de máxima pendiente AM y el punto B (viene dada su proyección horizontal).

317. Cortar a dos rectas que se cruzan AB y CD con una recta KM perpendicular al plano dado por el triángulo EFG (fig. 299).

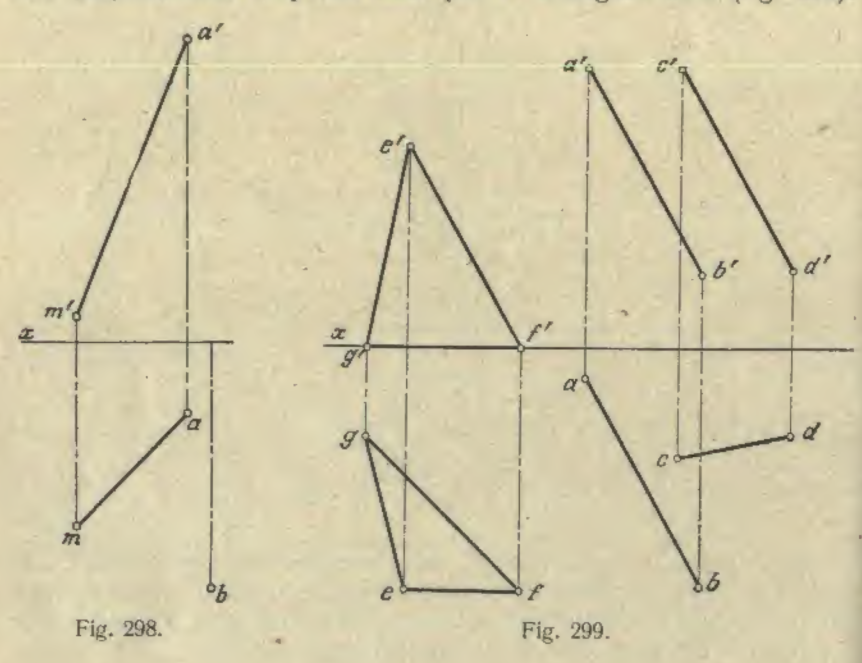


Fig. 298. Fig. 299.

318. Un plano oblicuo está dado por las directrices AB y CD y el plano de paralelismo: el plano proyectante horizontal P (viene dada su traza horizontal P_h). Construir la proyección de perfil de la línea de intersección del plano oblicuo con el plano de perfil S (fig. 300).

319. Construir las proyecciones frontal y horizontal del punto K perteneciente a la superficie de un elipsoide de revolución achatado (viene dada la proyección k'', el punto es visible), y la forma verdadera de la sección $A—A$ (fig. 301).

320. Construir las proyecciones de una esfera tangente a la esfera dada en el punto K situado en su parte delantera (está dada la proyección frontal del punto). El radio de la esfera buscada es $R_1 = 2/3\ R$ (fig. 302).

321. Construir las proyecciones de un cono circular recto tangente al cono dado en un punto visto K prefijado sobre la superficie lateral del cono dado (viene dada la proyección horizontal de este punto). El vértice S del cono buscado deberá estar situado sobre el plano H. La altura y el diámetro de ambos conos son iguales (fig. 303).

322. Por el punto A (viene dada su proyección frontal) perteneciente a una superficie de revolución (fig. 304) trazar la normal a dicha superficie; llevar sobre la normal el segmento AK de longitud l.

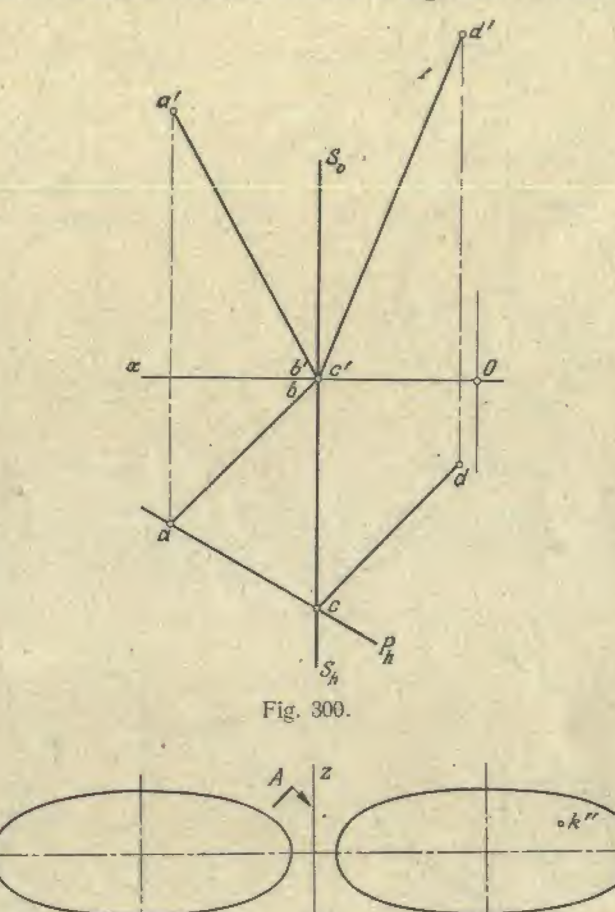


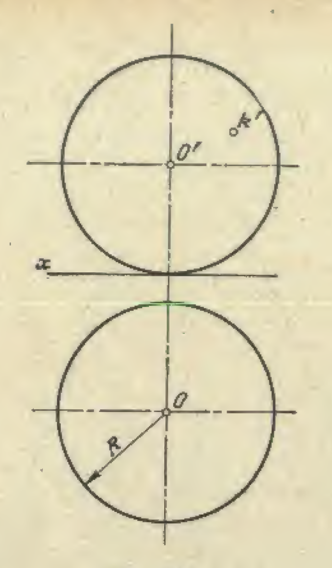
Fig. 300.

Fig. 301.

323. Vienen dados un prisma y el segmento AB en una de sus caras. Cortar al prisma con un plano que pasa por la recta AB de modo tal, que en la sección se obtenga un triángulo isósceles ABC con base AB (fig. 305).

324. Valiéndose del giro alrededor de la traza frontal P_v abatir la recta AB (AB es paralela al plano V) sobre el plano P (fig. 306).

325. Construir sobre el plano P el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los puntos más cercanos de dos rectas que se cruzan AB y CD (fig. 307).



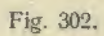


Fig. 302.

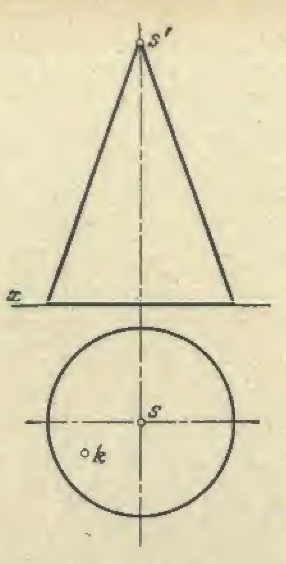


Fig. 303.

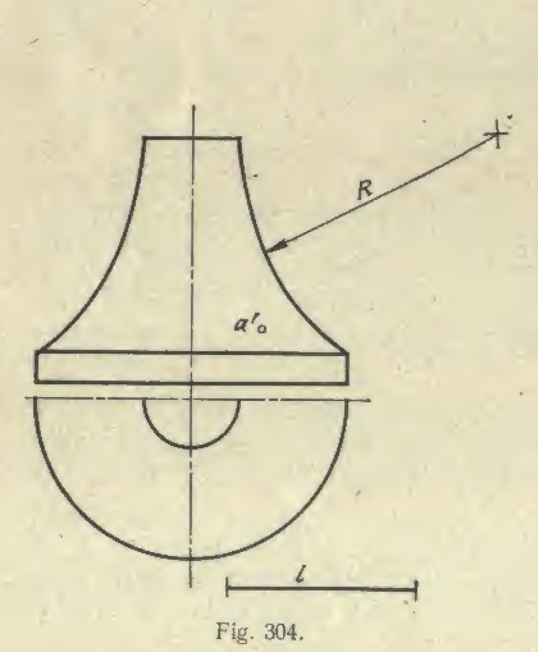


Fig. 304.

Fig. 305.

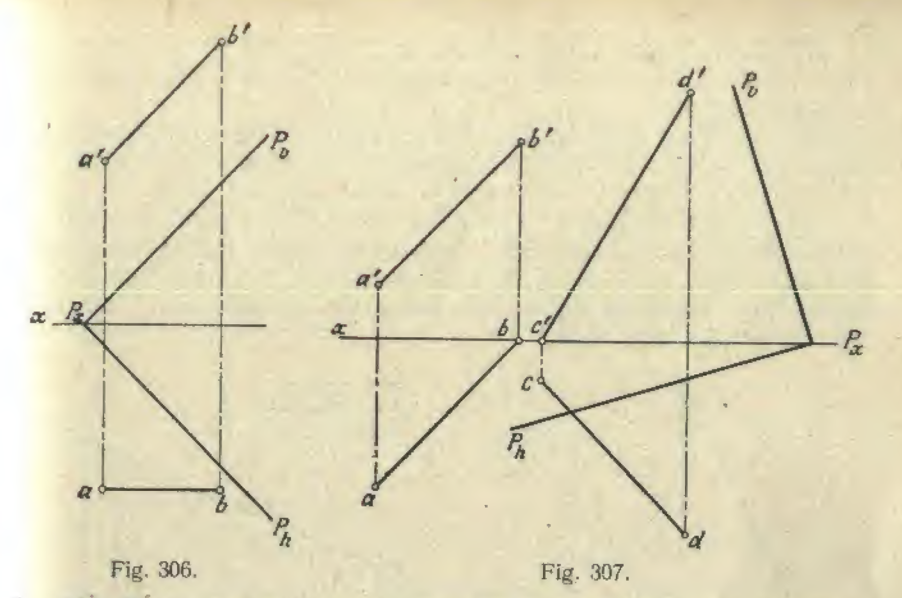


Fig. 306.

Fig. 307.

326. Están dadas dos posiciones de la recta AB girada alrededor de cierta recta CD. Determinar la posición de esta recta y la magnitud del ángulo de giro α (fig. 308).

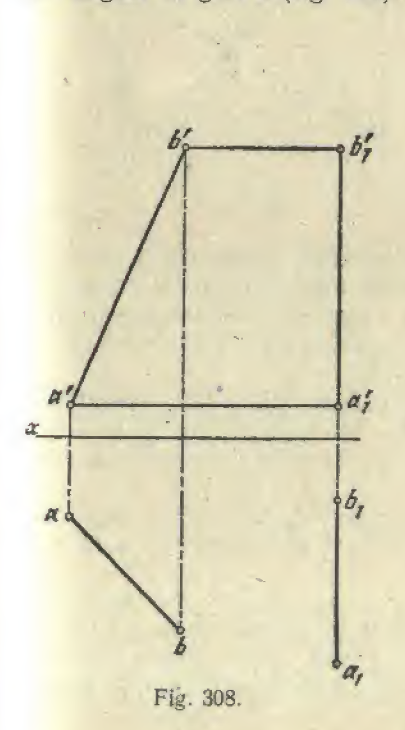


Fig. 308.

Fig. 309.

327. Están dadas dos posiciones de la recta AB girada alrededor de cierta recta. Construir las proyecciones de esta recta dándose su traza horizontal M y un punto arbitrario C (fig. 309).

328. Vienen dados la recta AB y el punto C. Trazar por el punto A rectas que corten a AB bajo un ángulo $\alpha = 30°$ y que se encuentren a la distancia l del punto C. Dar todas las soluciones (fig. 310).

329. Vienen dadas las rectas EF y MN (MN es paralela al plano H) que se cortan en el punto K. Construir los puntos que se encuentran a la distancia l_3 del punto K, a la distancia l_2 de la recta EF y a la distancia l_1 de la recta MN (fig. 311). Construir todos los puntos que responden a esta condición.

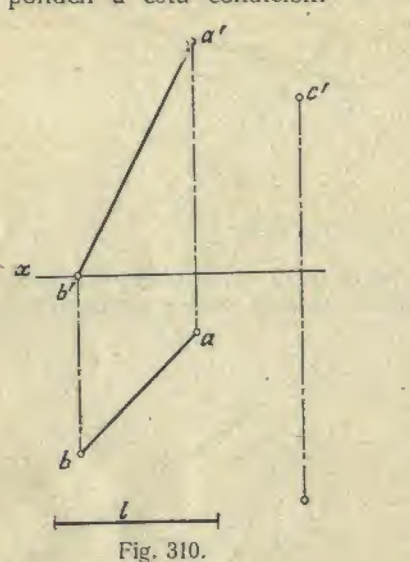


Fig. 310.

Fig. 311.

330. Vienen dados el punto A y la recta BC. Trazar por el punto A las rectas que se encuentran a la distancia l de la recta AB y que forman con ella un ángulo $\alpha = 45°$. De todas las soluciones posibles, dar sólo aquellas en las que las rectas que pasan por el punto A se aproximan al punto C y no al B (fig. 312).

331. Están dadas dos rectas que se cruzan AB y CD. Trazar por el punto A rectas que corten a la recta AB bajo el ángulo $\alpha = 30°$ y que se encuentren a la distancia l de la recta CD. Dar todas las soluciones posibles (fig. 313).

332. Están dadas dos rectas que se cruzan AB y CD. Trazar las rectas que cortan a AB, son paralelas a CD y se encuentran a la distancia l de esta última (fig. 314).

333. Están dadas dos rectas que se cruzan AB y CD. Trazar la recta EF que corta a dichas rectas y que forma con la recta AB un ángulo $\alpha = 46°$ y con la recta CD un ángulo $\beta = 53°$. Dar la solución en la que la recta EF corta a las dadas en los límites del primer cuadrante (fig. 315).

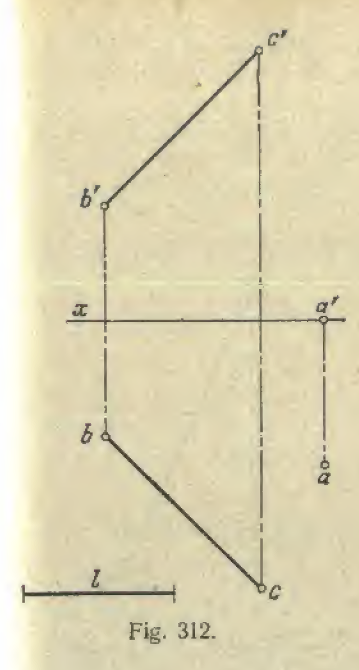


Fig. 312.

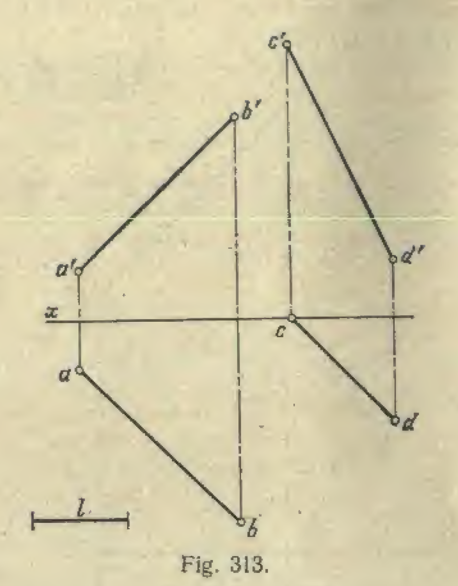


Fig. 313.

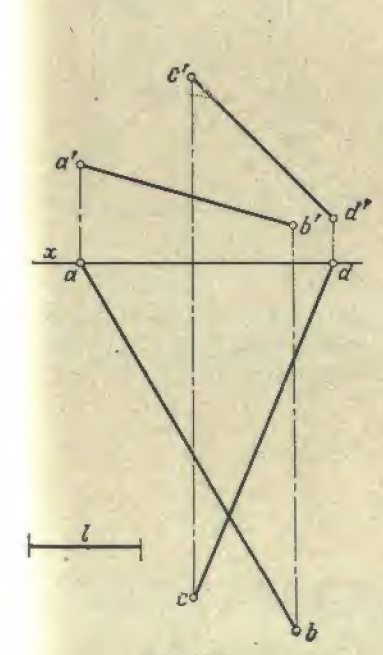


Fig. 314.

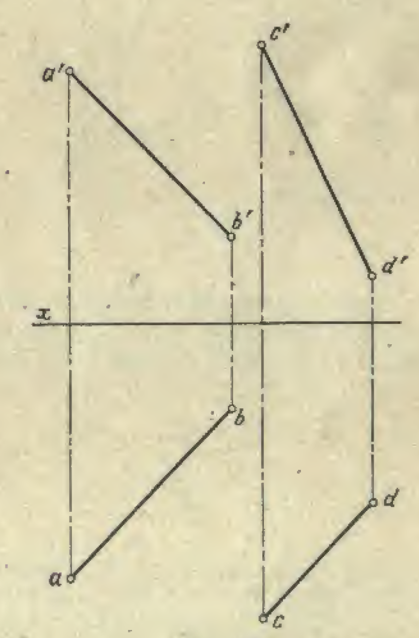


Fig. 315.

334. Construir el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a la distancia l del punto A y equidistantes de los lados del ángulo BCD (fig. 316).

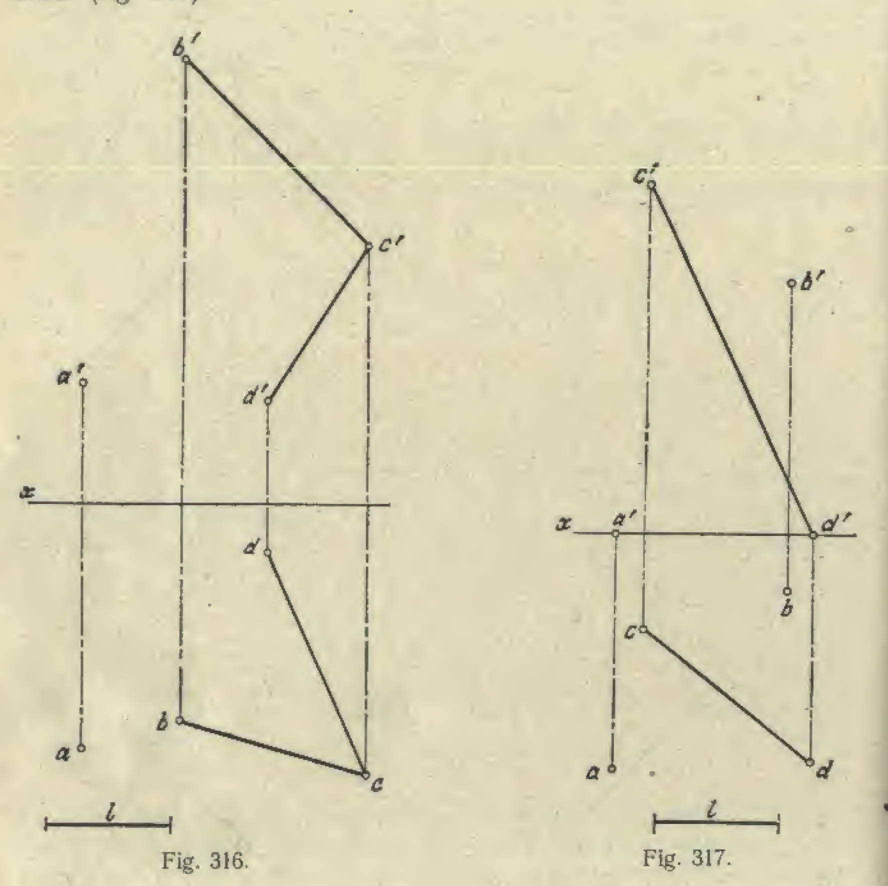


Fig. 316.

Fig. 317.

335. Vienen dados dos puntos A y B y la recta CD. Trazar por el punto A rectas que corten a la recta CD y que se encuentren a la distancia l del punto B. Dar todas las soluciones posibles (fig. 317).

VIII

CAPÍTULO

PROYECCIONES AXONOMÉTRICAS

§ 26. REPRESENTACIÓN DE FIGURAS PLANAS

336*. Construir la proyección isométrica del triángulo ABC (fig. 318, a).

Solución. Construimos las proyecciones isométricas de los vértices A, B y C con ayuda de sus coordenadas. Marcamos sobre el eje x del dibujo dado (fig. 318, a) el punto O (el origen de coordenadas). La magnitud del segmento Oa_x nos da la

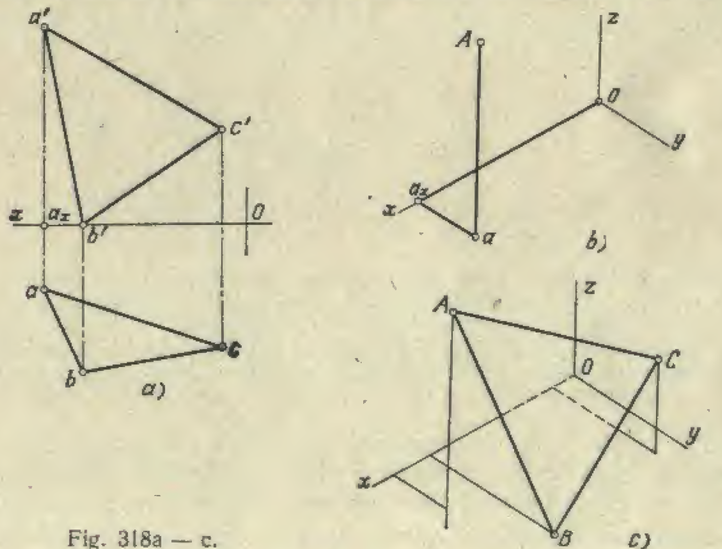


Fig. 318a — c.

abscisa del punto A, la magnitud del segmento a_xa, la ordenada, y la magnitud del segmento a_xa', la Z-coordenada. Ahora podemos pasar al sistema de ejes isométricos (fig. 318, b) y a) llevar sobre el eje x el segmento Oa_x, tomándolo de la fig. 318, a; b) trazar por a_x una recta paralela al eje y; c) llevar sobre esta recta el segmento a_xa_1, tomándolo igual al segmento $a_x\ a$ en la fig. 318, a; d) trazar la

recta a_1A paralelamente al eje z y llevar sobre ella el segmento a_1A igual a a_xa' en la fig. 318, *a*. Obtenemos la proyección isométrica del vértice *A*. Construyendo análogamente las proyecciones de los vértices *B* y *C*, obtendremos (fig. 318, *c*) la proyección isométrica del triángulo *ABC*.

337*. Determinar las coordenadas del punto *K* situado sobre el plano del triángulo *ABC* dado por su proyección dimétrica y las segundas proyecciones de los vértices sobre el plano *xOy* (fig. 319, *a*).

Solución. Si el punto *K* pertenece al plano del triángulo *ABC*, entonces se encuentra sobre una recta cualquiera (por ejemplo, la *AD*) en este plano (fig. 319, *b*).

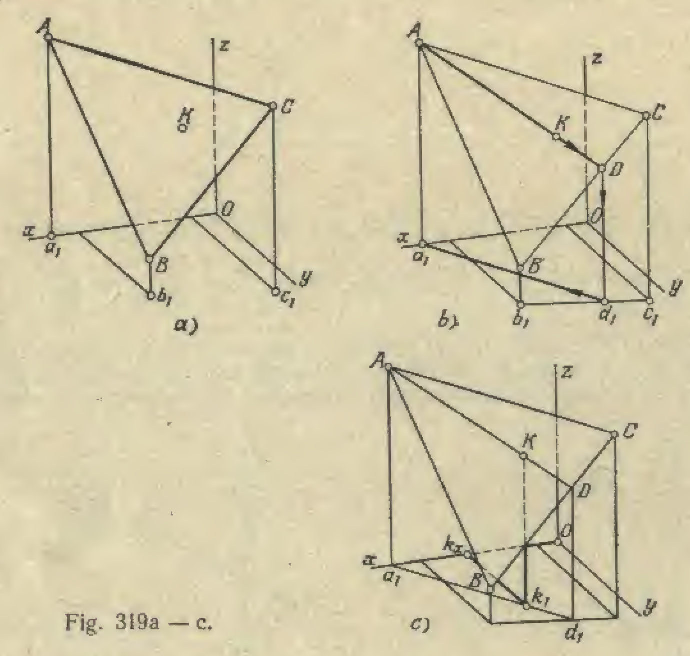


Fig. 319a — c.

Construyendo sobre el plano *xOy* la segunda proyección d_1 del punto *D* y la segunda proyección a_1d_1 de la recta *AD* hallamos (fig. 319, *c*) la segunda proyección k_1 del punto *K*. Ahora se pueden hallar las coordenadas del punto *K* expresadas por los segmentos Ok_x (la abscisa), $2k_1k_x$ (la ordenada) y k_1K (la *Z*-coordenada). El coeficiente 2 adjunto al segmento k_1k_x se ha tomado debido a la doble reducción de los segmentos paralelos al eje *Oy* al construir la proyección dimétrica.

338*. Construir las proyecciones isométrica y dimétrica de la circunferencia de radio *R* situada en el plano dado por el triángulo *ABE* (fig. 320, *a*). El centro de la circunferencia se encuentra en el punto *C*.

Solución. La circunferencia, que hay que representar en las proyecciones isométrica y dimétrica, está situada sobre un plano de posición general. Por esta razón, aquí no podemos aplicar las reglas conocidas acerca de que el eje mayor de la elipse, que representa la circunferencia en las proyecciones isométrica y dimétrica, es perpendicular al así llamado eje libre, y de que el eje menor de la elipse es igual en la proyección isométrica a 0,7*d*, donde *d* es el diámetro de la circunferencia que se representa, etc. Estas reglas son justas para los casos en que se

representan circunferencias situadas en planos frontales, horizontales y de perfil. Para el caso dado, es justo solamente el hecho de que el eje mayor de la elipse en la proyección isométrica es igual a 1,22*d*, y en la proyección dimétrica, a 1,06*d*. Pero la posición de este eje debe ser hallada y ésta, naturalmente, varía en dependencia de la posición del plano en el que está situada la circunferencia que se representa.

Teniendo esto en cuenta, nos valemos del procedimiento de construcción conocido del curso de Geometría Descriptiva, aplicable cualquiera que sea la posición de la circunferencia. Con ayuda de este procedimiento, ante todo, debemos construir en el dibujo dado la perpendicular al plano en el que está situada la circunferencia. Esta perpendicular, construida luego en la proyección isométrica o dimétrica, nos da la dirección del eje menor de la elipse. En la fig. 320, *b* se muestra la construcción de esta perpendicular, trazada desde el centro de la circunferencia. A continuación, hay que llevar sobre esta perpendicular el segmento *CD* igual al radio *R* de la circunferencia. Esto se muestra en la fig. 320, *c*. Si se construye ahora las proyecciones isométrica (fig. 320, *d*) y dimétrica (fig. 320, *f*) del segmento *CD*, obtendremos la dirección del eje menor de la elipse y el centro de la circunferencia que se representa.

Trazando (fig. 320, *e*) desde el punto *C* la perpendicular *CD*, obtenemos la dirección del eje mayor de la elipse, y llevando sobre este eje la magnitud 1,22*R* a ambos lados del punto *C*, obtenemos el eje mayor de la elipse (el segmento k_1k_2).

Para determinar la magnitud del eje menor de la elipse, procedemos de la manera siguiente: trazamos desde el punto *D* un arco de radio 1,22*R*, intersecando con él la dirección del eje mayor. El segmento *Cm*, obtenido en este caso, expresa el semieje menor.

Por consiguiente, obtenemos la dimensión y la posición de ambos ejes de la elipse. Los puntos para dibujar la elipse pueden ser obtenidos valiéndonos de la construcción conocida de la elipse con auxilio de sus ejes mayor y menor (fig. 320, *e*).

Procedemos análogamente para la construcción de la proyección dimétrica (fig. 320, *g*). La diferencia consiste solamente en la magnitud del radio (1,06R en lugar de 1,22*R*) del arco trazado desde el punto *D*, y en la dimensión del eje mayor de la elipse. El eje menor de la elipse se obtiene por construcción y, claro está, su

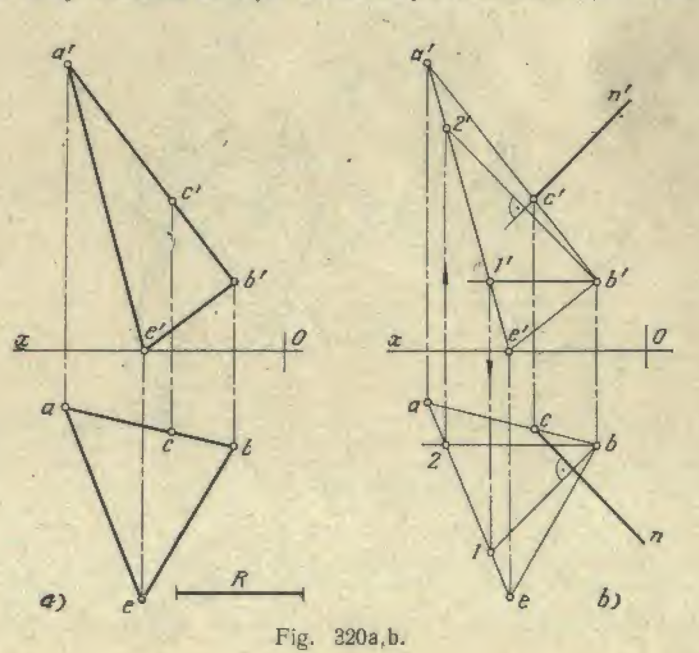


Fig. 320a,b.

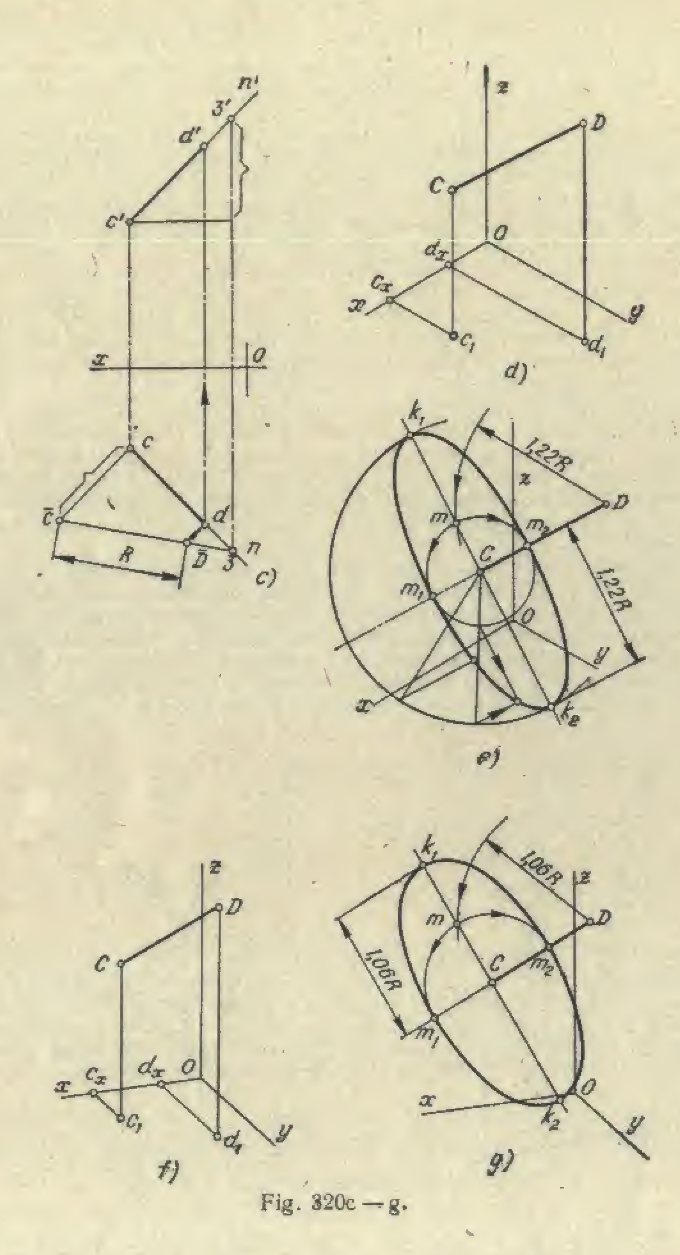


Fig. 320c — g.

magnitud varía en dependencia del ángulo entre el plano, en el que está situada la circunferencia que se representa, y el plano de proyección dimétrica (o isométrica) como se expone en el curso de Geometría Descriptiva.

339*. Construir las proyecciones isométrica y dimétrica de una circunferencia de radio R situada en cierto plano proyectante horizontal (fig. 321, *a*).

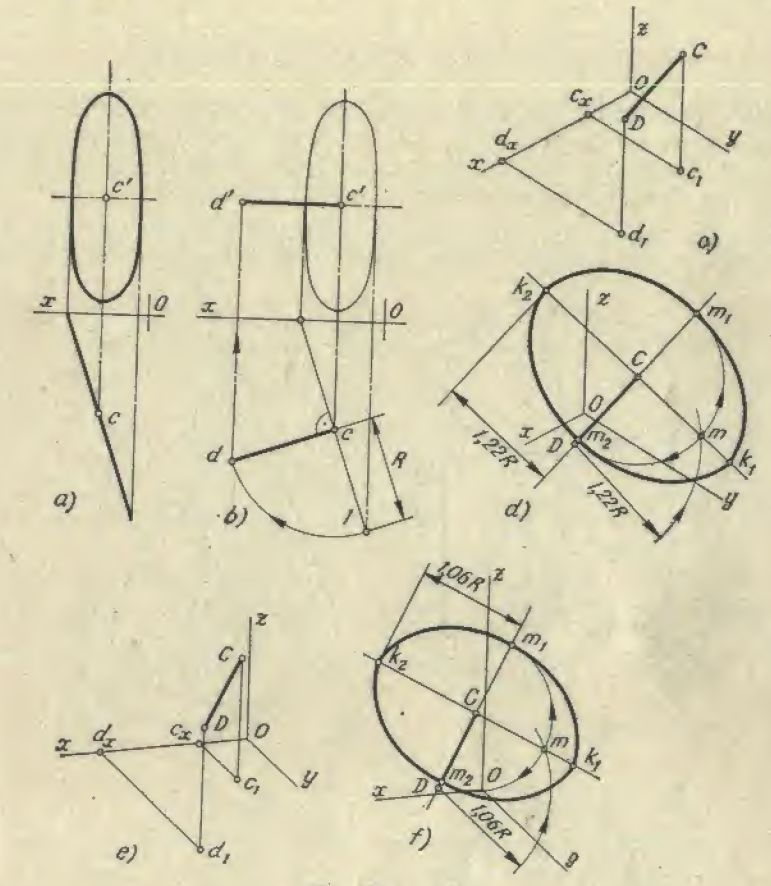


Fig. 321a — f.

Solución. En el problema 338 nos vimos con una circunferencia situada en un plano de posición general. Evidentemente, el procedimiento general que empleamos en aquel problema, es aplicable también para el caso dado. Pero la construcción se simplifica, puesto que se simplifica el trazado de la perpendicular al plano en el que está situada la circunferencia, y se lleva más fácilmente sobre esta perpendicular el segmento igual a R. Las construcciones para la proyección isométrica se muestran en la fig. 321, *b*, *c*, *d*. En la fig. 321, *b* se ha trazado la perpendicular $c'd'$, cd (además, $cd=R$) y se ha tomado el punto O (el origen de coordenadas). En la fig. 321, *c* el segmento CD se ha construido en la proyección isométrica con ayuda de las coordenadas tomadas de la fig. 321, *b*. La proyección isométrica

obtenida del segmento CD nos da la dirección del eje menor de la elipse y la posición de su centro (el punto C).

En la fig. 321, d, por el punto C se ha trazado perpendicularmente a CD el eje mayor de la elipse, igual a $1{,}22R$, donde $d=2R$ es el diámetro de la circunferencia que se representa, y se ha determinado la magnitud del semieje menor de la elipse, y se ha representado la propia elipse.

Construcciones análogas se han efectuado también para la proyección dimétrica (fig. 321, e y f).

§ 27. REPRESENTACIÓN DE CUERPOS

340*. Determinar las coordenadas del punto A perteneciente a la superficie: de un cilindro (fig. 322, a), de un cono en el caso de que exista el vértice (fig. 322, b), de un cono truncado (fig. 322, c), de una esfera (fig. 322, h), dados en la proyección isométrica.

Solución. Por el punto A dado en la superficie del cilindro (fig. 322, a) se ha trazado la generatriz (paralela al eje z) y se ha hallado sobre el plano xOy

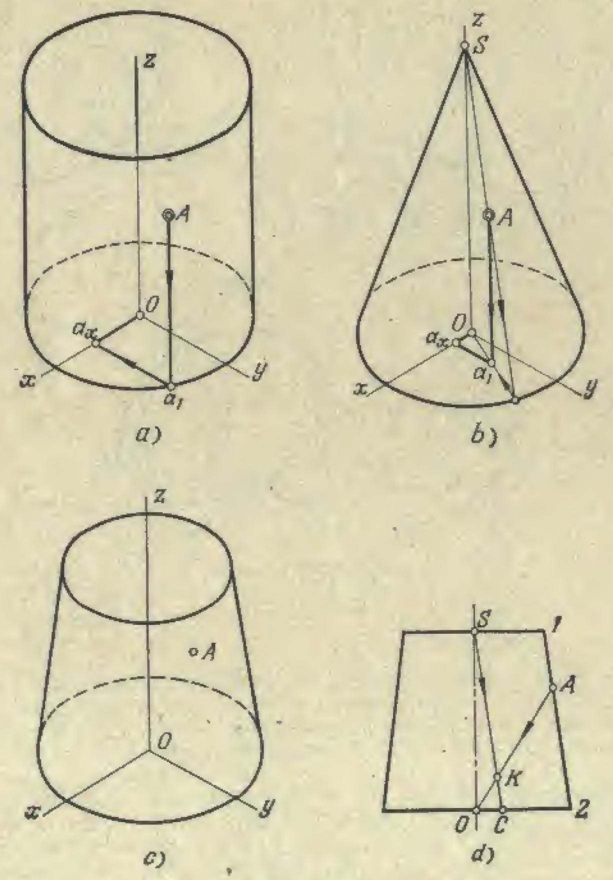


Fig. 322a —d.

la segunda proyección a_1 del punto A. Desde a_1 se ha trazado una recta paralelamente al eje y hasta su intersección con el eje x en el punto a_x.

La Z-coordenada del punto A se determina por la magnitud del segmento Aa_1, y la abscisa y la ordenada, por las magnitudes de los segmentos Oa_x y a_xa_1 respectivamente.

En la fig. 322, b por el punto A se ha trazado también una generatriz ($S—1$) y se ha construido (sobre el plano xOy) su segunda proyección $O—1$. Ahora sobre

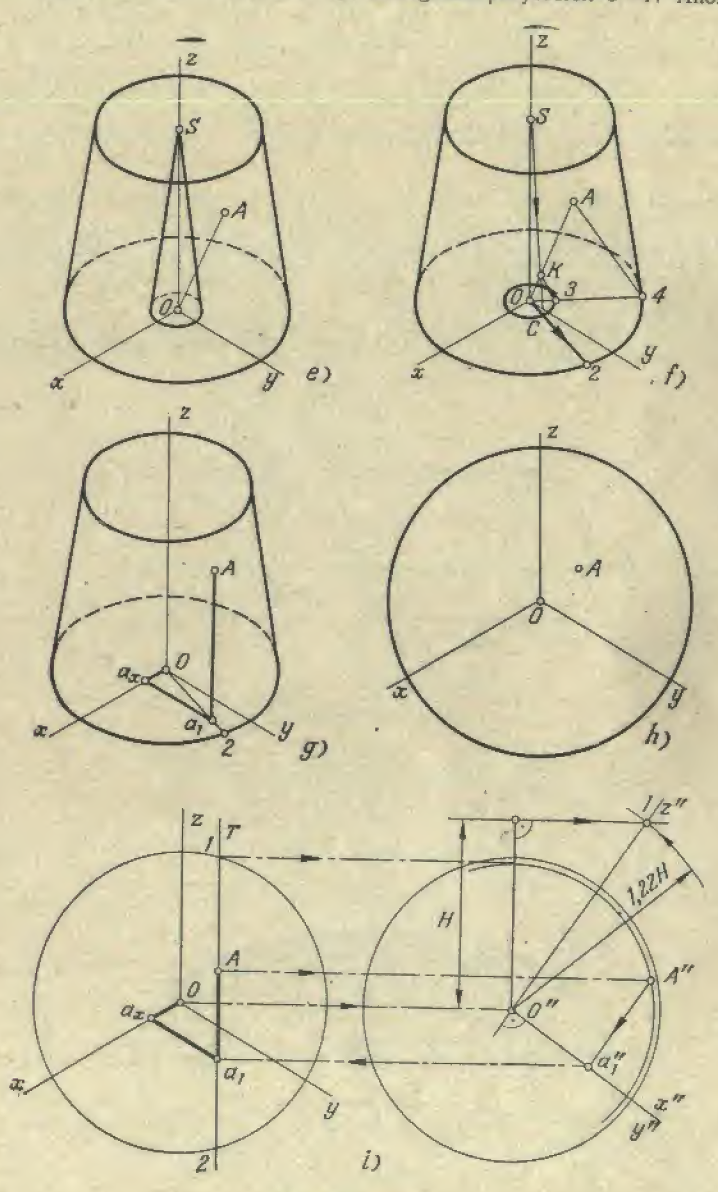


Fig. 322e — h.

$O-1$ se puede hallar el punto a_1 (la segunda proyección del punto A). Las magnitudes de los segmentos Aa_1, Oa_x y a_xa_1 determinan respectivamente las coordenadas z, x e y del punto A.

Si el punto está dado sobre la superficie de un cono truncado y según la condición no se puede obtener en el dibujo su vértice, entonces procedemos de la siguiente manera.

Examinemos primero la sección producida en el cono por un plano que pasa por el punto A y el eje del cono (fig. 322, *d*). Trazando las rectas AO y $SC \parallel 1-2$, obtenemos $\frac{OK}{KA} = \frac{OC}{C-2}$. Esta proporción se conservará también en la proyección isométrica. Por esta razón (fig. 322, *e*) trazamos la recta OA y construimos el cono con el vértice S y la generatriz paralela a la generatriz del cono truncado; comparando la fig. 322, *d* con la fig. 322, *f*, obtenemos que $\frac{O-3}{3-4} = \frac{OC}{C-2}$. Ahora dividimos OA en la proporción $\frac{O-3}{3-4}$. Por el punto obtenido K trazamos la generatriz SC del cono interior y el semidiámetro $O-2$ de la elipse, donde los puntos C y 2 corresponden a los puntos C y 2 en la fig. 322, *d*. A continuación tenemos la posibilidad de proyectar el punto A sobre el plano xOy (fig. 322, *g*) y obtener los segmentos coordenados Aa_1, a_1a_x y a_xO.

Para determinar las coordenadas del punto A perteneciente a la superficie de la esfera (fig. 322, *h*) hay que construir (fig. 322, *i*) las proyecciones suplementarias de la esfera y los ejes de coordenadas sobre el plano perpendicular al plano de proyección isométrica (al plano de imagen) y paralelo al eje z. Esto es como si fuera la proyección de perfil, si se considera que la proyección isométrica sirve de proyección frontal. El plano T que pasa por el punto A corta a la esfera según una circunferencia de diámetro $1-2$. Construimos la proyección de esta circunferencia y hallamos sobre ella la proyección del punto dado (la proyección A''). Con ayuda de A'' hallamos el punto a_1'' que es la proyección de perfil de la segunda proyección a_1 del punto A.

Ahora se pueden representar los segmentos Aa_1, a_1a_x y Oa_x. La magnitud de estos segmentos permite determinar las coordenadas del punto A respecto del centro O.

341*. Construir la proyección dimétrica de una arandela por el dibujo de la fig. 323, *a*.

Solución. Ante todo, del examen del dibujo en la fig. 323, *a*, establecemos que la arandela dada representa un cuerpo de revolución, cuya superficie lateral está compuesta de la parte cilíndrica con diámetro D y altura h y de la superficie de un toro generada por el giro de un arco de circunferencia de radio R alrededor del eje z, con la particularidad de que el centro de este arco describe una circunferencia de diámetro d_1. La arandela tiene un orificio cilíndrico de diámetro d_2. Por arriba y por abajo la arandela está delimitada por planos.

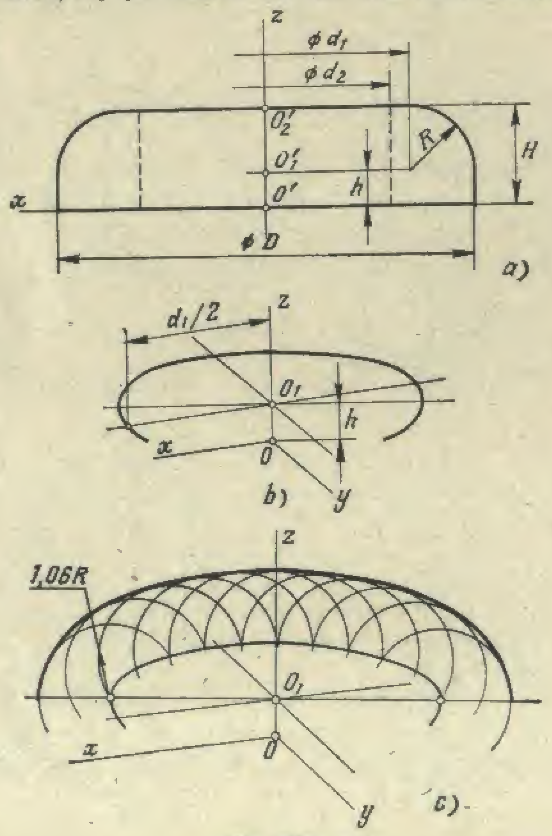


Fig. 323a — c.

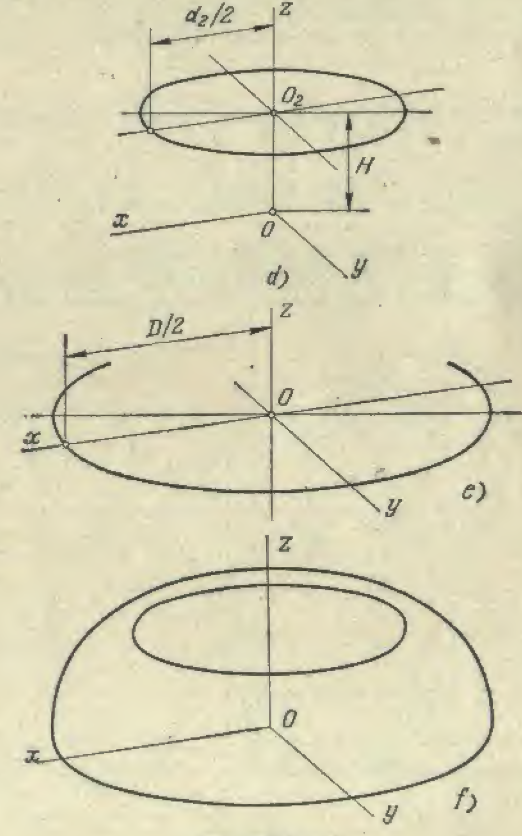


Fig. 323d — f.

Dirigiéndonos a la construcción de la proyección dimétrica, ante todo imaginémonos que en la superficie del toro, que delimita parcialmente a la arandela, están inscritas esferas de radio R, cuyos centros están situados en la circunferencia de diámetro d_1.

La línea de contorno de la proyección dimétrica se ha construido con ayuda de las esferas incsritas en la parte de la superficie de la arandela, que representa la superficie de un toro generada por el giro del arco de circunferencia de radio R alrededor del eje z (fig. 323, *a*). Los centros de estas esferas inscritas en dicha superficie, se sitúan en la circunferencia de diametro d_1 y centro en el punto O_1 a la distancia h del plano de apoyo de la arandela. En la fig. 323, *b* se muestra la elipse que es la proyección dimétrica de esta circunferencia. Tomando sobre esta elipse una serie de puntos (fig. 323, *c*), trazamos desde ellos circunferencia de radio $1{,}06R$, que representan los contornos de las proyecciones dimétricas de esferas de radio R. La línea de contorno de la proyección de la superficie del toro es la envolvente de una familia de curcunferencias.

Luego construimos la elipse, que representa la proyección del borde superior del orificio de diámetro d_2 con centro en el punto O_2 (fig. 232, *d*) y parte de la elipse (fig. 323, *e*) con centro en el punto O, que representa la proyección de la circunferencia de la base de la parte cilíndrica de la arandela. Desde los extremos del eje mayor de esta elipse trazamos líneas rectas (fig. 323, *f*), que representan las líneas de contorno de la proyección de la parte cilíndrica de la arandela. Estas rectas hacen contacto con el contorno de la superficie del toro, construido anteriormente. Si nos imaginamos que de la arandela dada se ha «cortado» una parte con los planos xOz e yOz, obtendremos una representación más clara de la arandela. Pero, en este caso, varía el orden de la construcción (véase a continuación el problema 344).

342.* Construir la proyección isométrica de un cuerpo de revolución representado en la fig. 324, *a*.

Solución. El cuerpo de revolución dado está delimitado por una superficie combinada compuesta por un plano, un cilindro de revolución, la superficie de un toro y una esfera.

Efectuamos la construcción en el orden siguiente:

1. Tomando el punto O (fig. 324, *b*) en calidad de origen de coordenadas, llevamos al eje z un segmento igual a H, y trazamos desde el punto C como centro

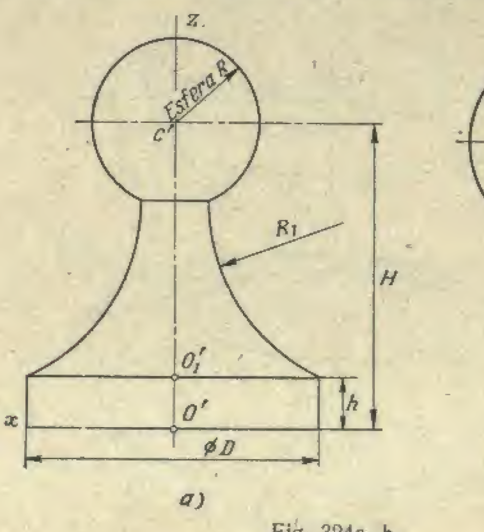
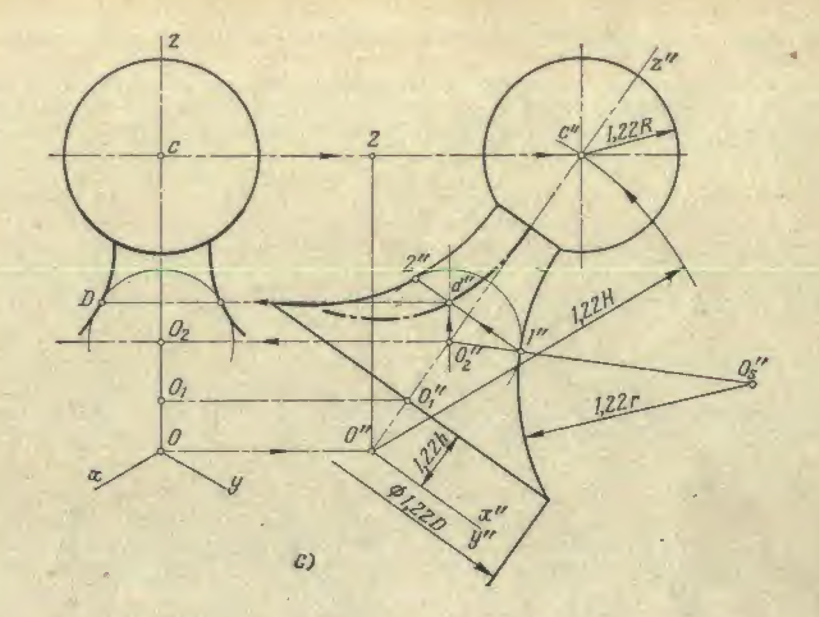


Fig. 324a, b.



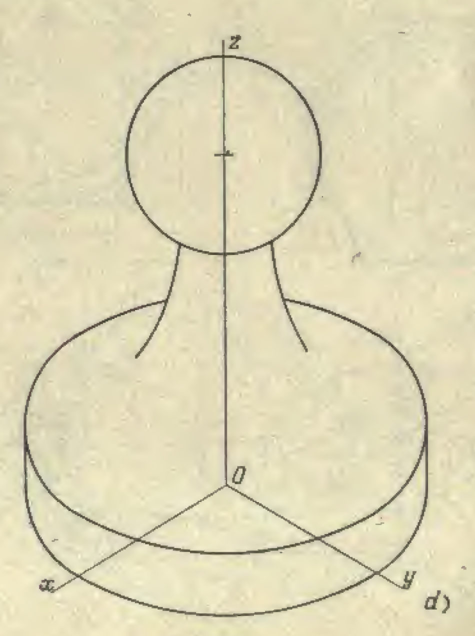


Fig. 324c, d.

una circunferencia de radio 1,22R. Así se representará en la proyección isométrica la esfera de radio R.

2. Para construir el contorno de la superficie del toro en la proyección isométrica, representamos la parte superior del cuerpo dado en posición inclinada (fig. 324, c), con la particularidad de que la inclinación del eje del cuerpo se determina por la relación

$$\frac{C''2}{O''2}=\sqrt{\frac{2}{3}},$$

lo que corresponde al valor del coeficiente de reducción de los ejes x, y, z en la proyección isométrica. Ahora ejecutamos la construcción, como en el problema 242, lo que nos ofrece la posibilidad de, además de representar la esfera en la proyección isométrica, dar el contorno visible de la superficie del toro.

3. Luego construimos (fig. 324, d) la proyección isométrica del cilindro que se encuentra en la base del cuerpo dado. Aquí es aplicable la regla según la cual el eje mayor de la elipse, que representa en la proyección isométrica a la circunferencia, es perpendicular al eje «libre», como cual sirve el eje z. El eje mayor de la elipse se toma igual a 1,22D y el eje menor, a 0,7D.

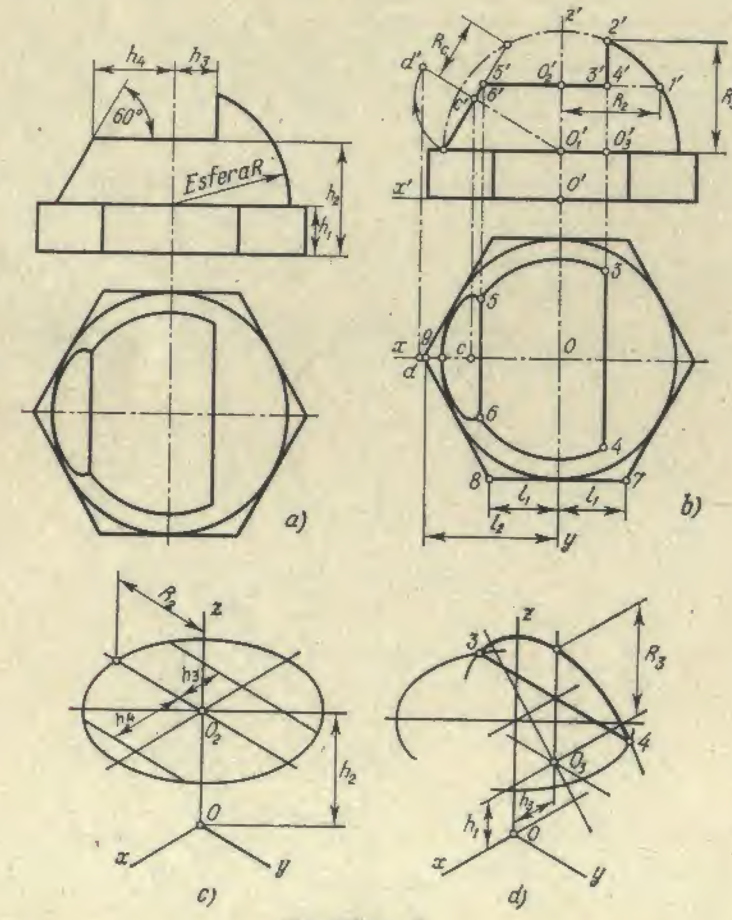


Fig. 325a — d.

343*. Construir la proyección isométrica del cuerpo representado en la fig. 325, a.

Solución. Ante todo, establecemos que el cuerpo dado está compuesto por un prisma hexagonal regular y la mitad de una esfera, cortada por tres planos. Preparamos las dimensiones de los elementos del cuerpo, necesarios para la construcción de la proyección isométrica (fig. 325, b).

Comenzamos la construcción de la proyección isométrica.

1. Tomando como origen de coordenadas el punto O (fig. 325, b y c), construimos el arco de radio R_2 con centro en el punto O_2, situado a la distancia h_2 del origen de coordenadas.

2. Luego (fig. 325, d), describimos el arco de radio R_3 con centro en el punto O_3, que tiene las coordenadas $x=h_3$, $y=0$ y $z=h_1$, y trazamos la recta 3—4 paralelamente al eje y.

3. Con ayuda de las coordenadas de los puntos C y D construimos el segmento CD (fig. 325, e) y trazamos perpendicularmente a éste una recta por el punto C. Trazamos los segmentos $Ck_1=Ck_2=1{,}22R_C$ y obtenemos el segmento k_1k_2 que es el eje mayor de la elipse que representa la proyección de la circunferencia de radio R_C con centro C (véase la fig. 325, b). El eje menor m_1m_2 se obtiene haciendo desde el punto D como centro unas intersecciones sobre el eje mayor de la elipse con un arco de radio $1{,}22R_C$ y llevando sobre la recta CD el segmento $Cm=Cm_1=Cm_2$. Trazamos la recta 5—6 paralelamente al eje y.

4. Desde el centro O_1, situado sobre el eje z a la distancia h_1 de la base del cuerpo dado (fig. 325, f), trazamos una circunferencia de radio 1,22R, que repre-

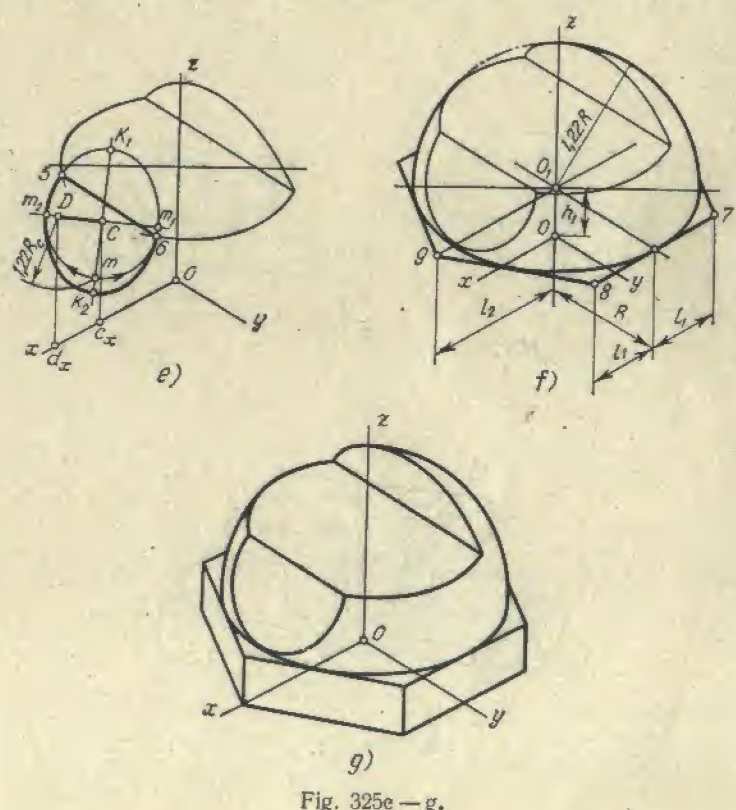


Fig. 325e — g.

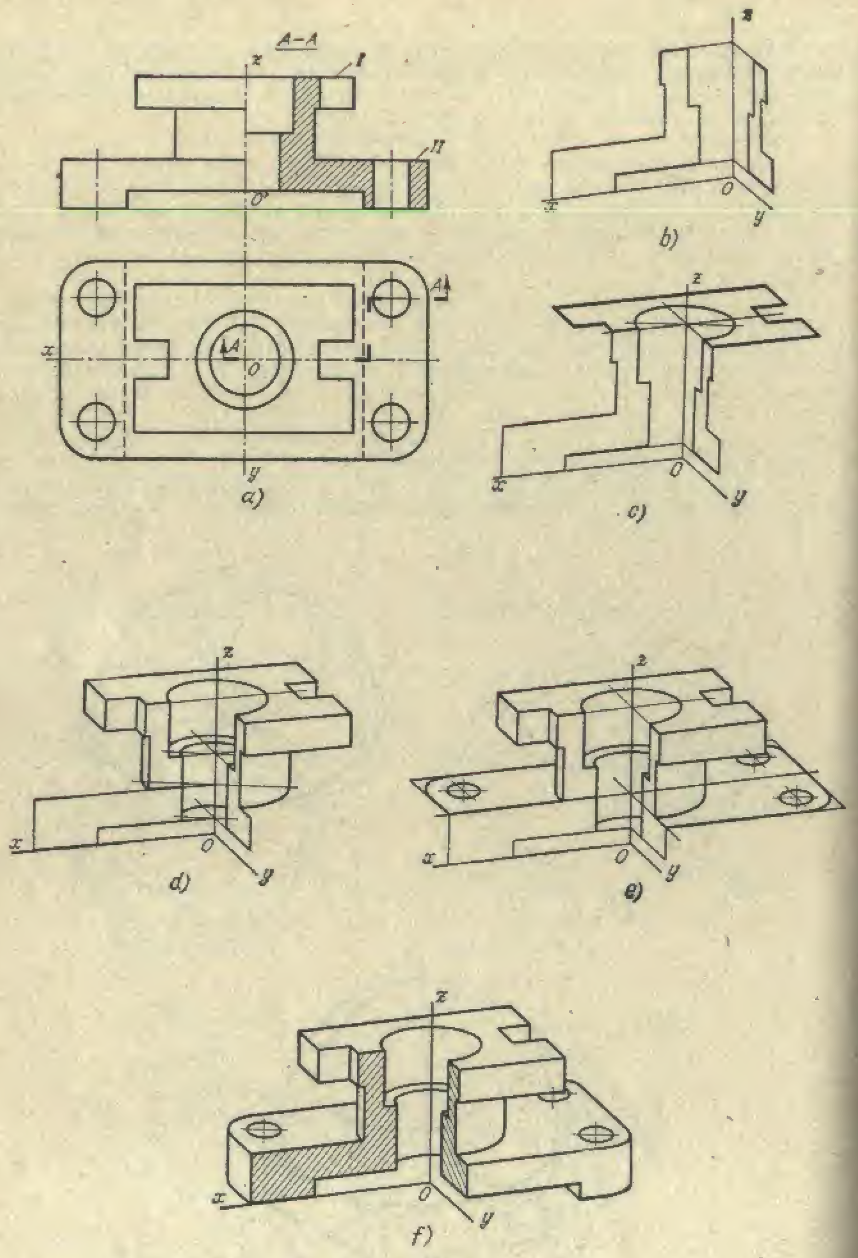


Fig. 326a — f.

senta el contorno de la proyección isométrica de la esfera de radio R. Esta circunferencia deberá hacer contacto con las tres elipses construidas anteriormente.

Con ayuda de las coordenadas de los puntos *9*, *8*, *7* y los simétricos a estos, construimos las proyecciones de los lados visibles del hexágono de la base superior.

5. Terminamos de construir (fig. 325, *g*) las proyecciones de las secciones vistas de la base hexagonal inferior, conociendo su altura h_1.

344*. Construir la proyección dimétrica de la pieza representada en la fig. 326, *a*.

Solución. Para evitar construcciones innecesarias al efectuar la representación de la pieza con orificio, lo más conveniente es realizar la construcción en el orden siguiente:

1. Dibujar (fig. 326, *b*) las secciones que forman los cortes frontal y de perfil, para los casos cuando los planos secantes coinciden con los planos de simetría de la pieza.
2. Dibujar la cara *I* de la brida superior de la pieza (fig. 326, *c*).
3. Dibujar (fig. 326, *d*) los demás elementos vistos de la brida superior y la parte cilíndrica de la pieza, y también las elipses de los cilindros interiores.
4. Dibujar la cara *II* de la base de la pieza y las circunferencias de los orificios cilíndricos en esta base (fig. 326, *e*).
5. Terminar de construir la base de la pieza y rayar las secciones (fig. 326, *f*).

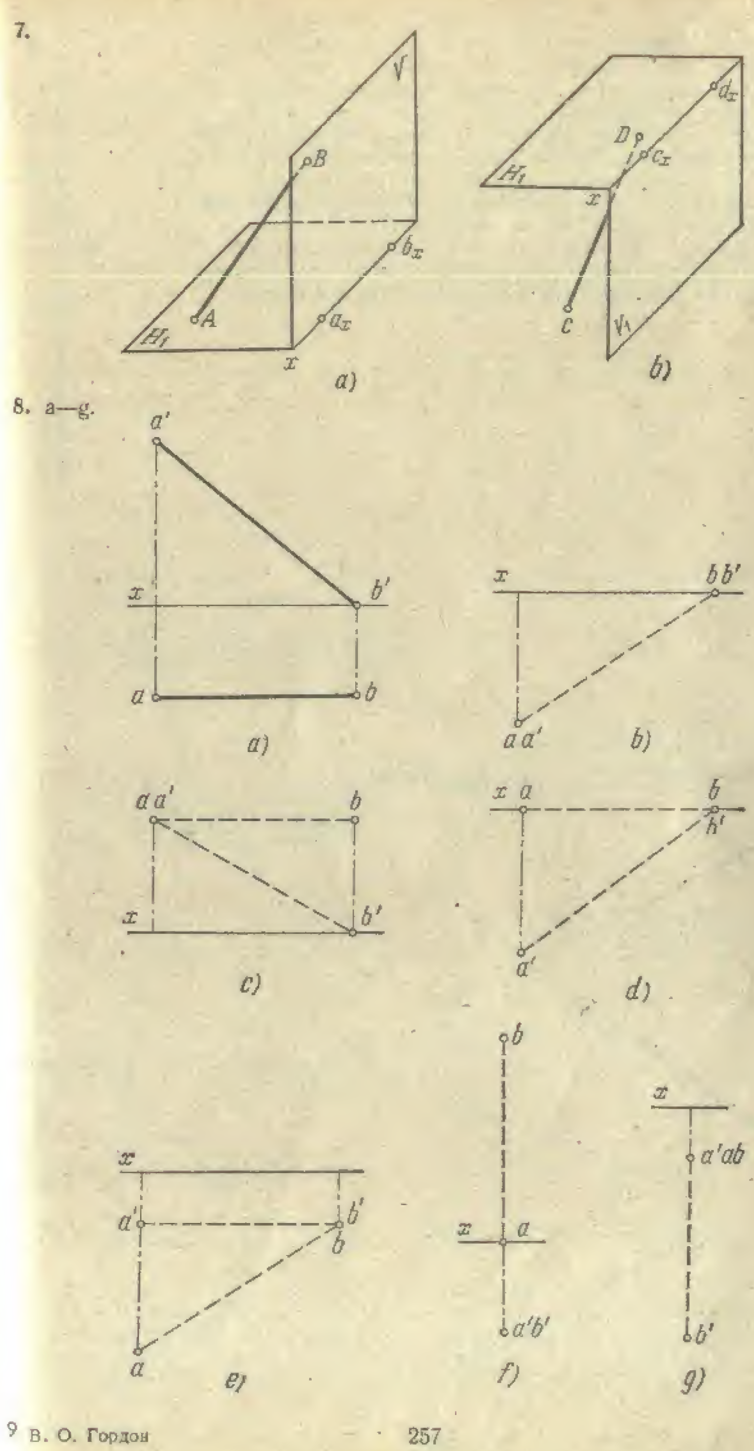
RESPUESTAS

2.

4.

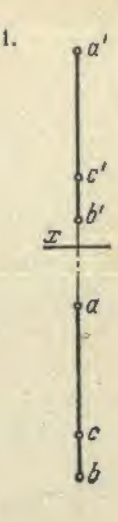
a)

b)

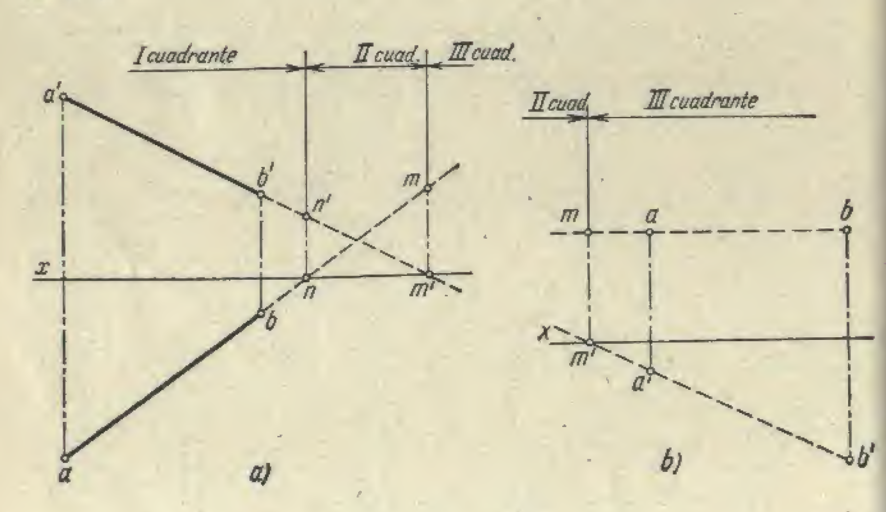


9. a) CD es el segmento de una recta de posición general; se encuentra en el primer cuadrante del espacio y con su extremo D se apoya en el semiplano horizontal anterior. El extremo C equidista de ambos planos de proyección.
b) El segmento AB está situado en el tercer cuadrante del espacio paralelamente al plano frontal de proyección. Con su extremo B se apoya sobre el semiplano horizontal posterior.
c) El segmento EF está situado en el semiplano frontal superior paralelamente al eje de proyección.
d) El segmento IK está situado en el segundo cuadrante del espacio perpendicularmente al plano frontal de proyección. El extremo K equidista de ambos planos de proyección.

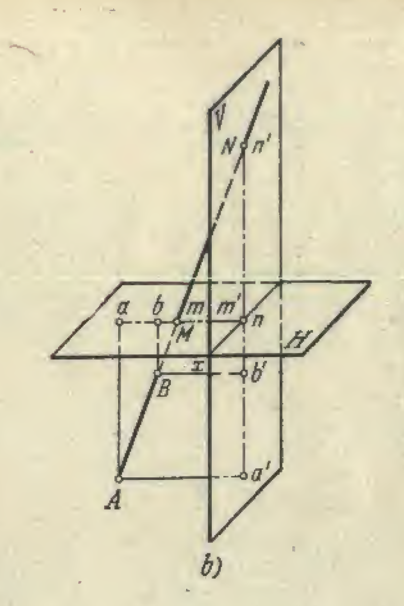
11.



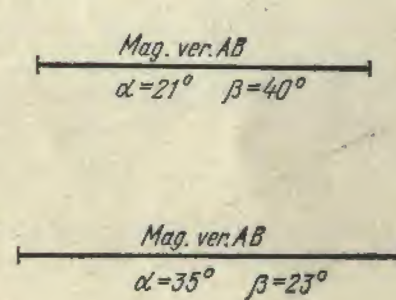
13. a, b.



15.



16.



18.

Mag. ver. AB

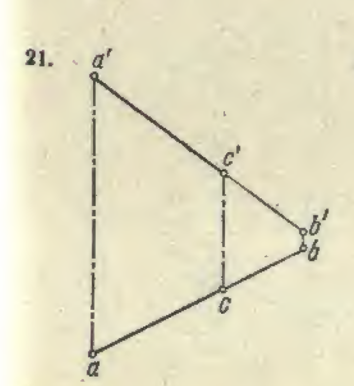
$\alpha=21^\circ$ $\beta=40^\circ$

19.

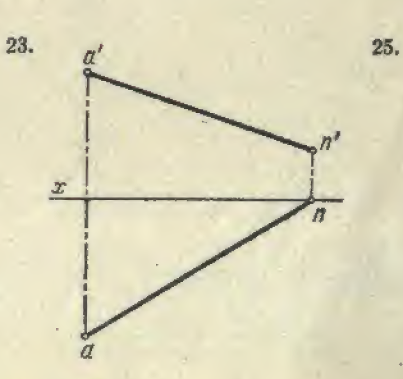
Mag. ver. AB

$\alpha=35^\circ$ $\beta=23^\circ$

21.



23.



25.

a
c
b
x
a'
c'
b'

27.

29.

30. a, b.

a)

b)

32. a, b.

a)

b)

35.

36.

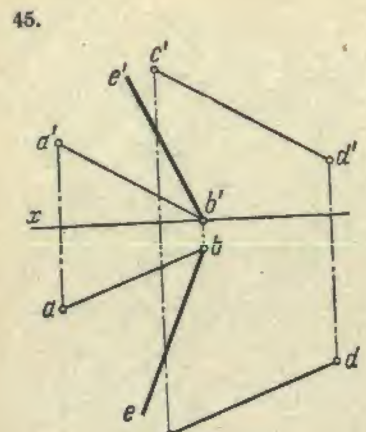
38.

39.

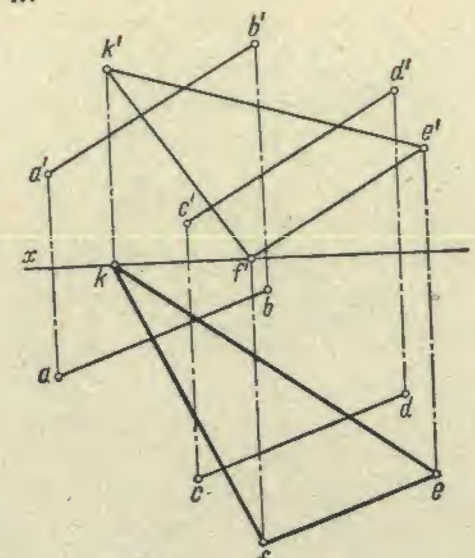
41.

43.

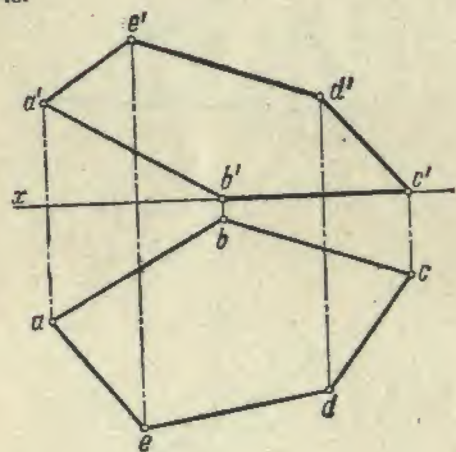
45.



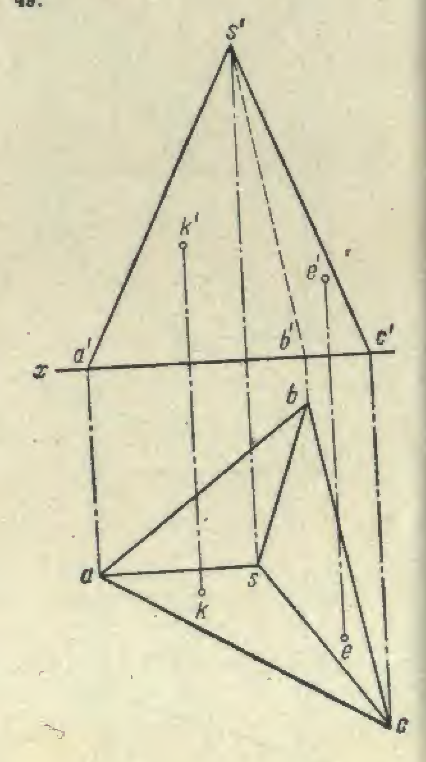
47.



48.



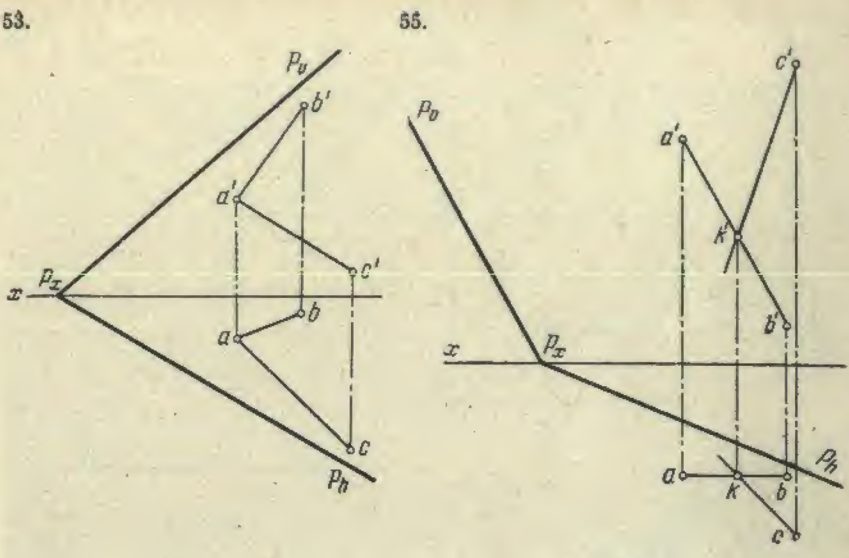
49.



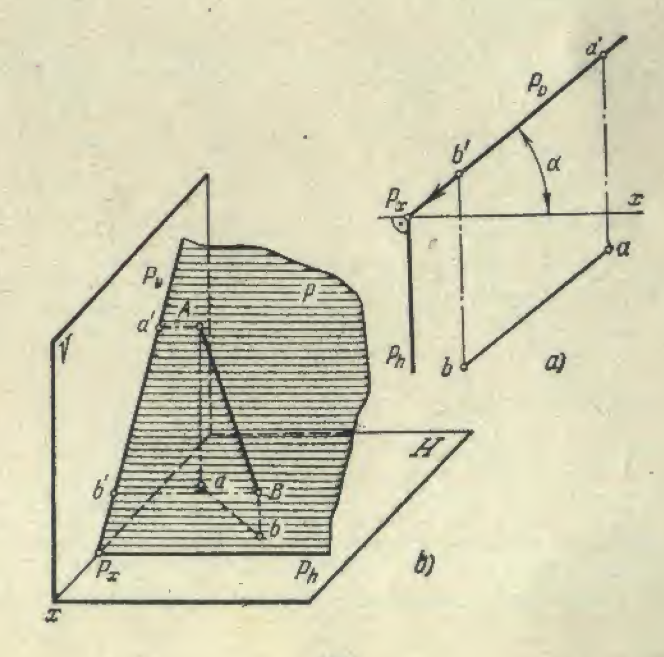
51. El plano dado es un plano de posición general.

53.

55.



58.



59. a—c

60.

62.

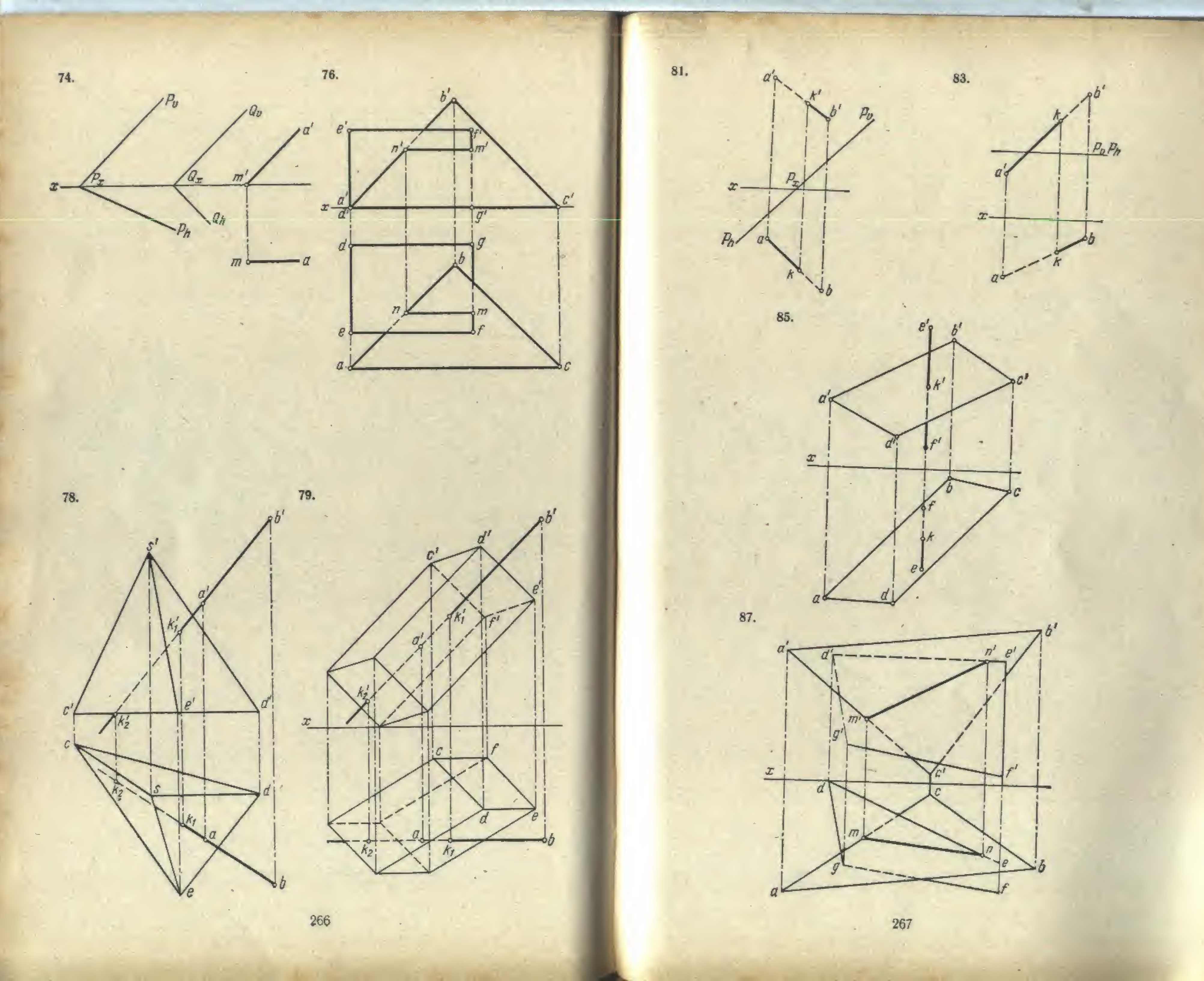
66.

68.

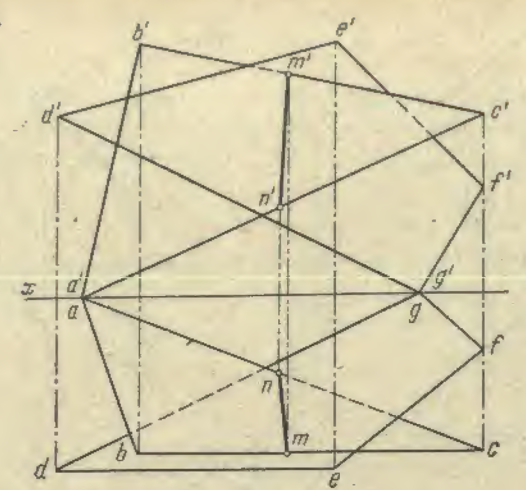
69.

71.

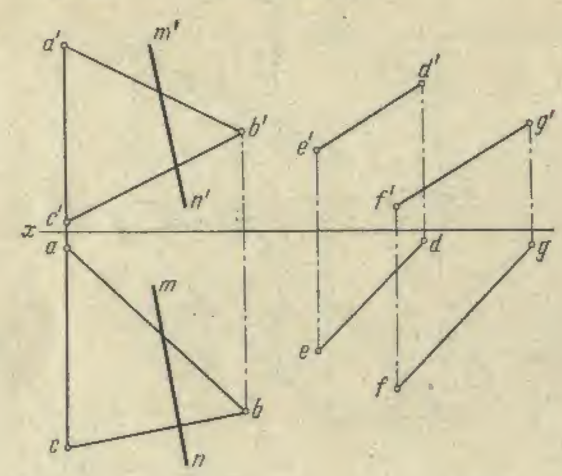
72.


74.
76.
78.
79.
81.
83.
85.
87.

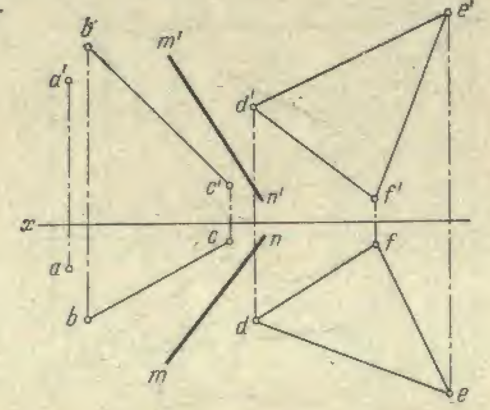
88.



90.

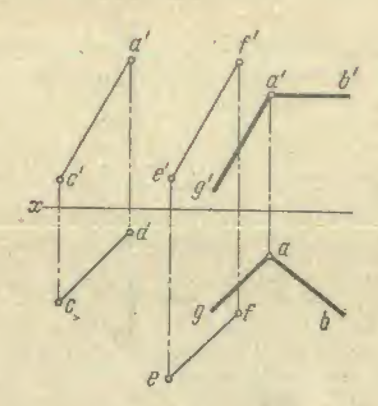


91.

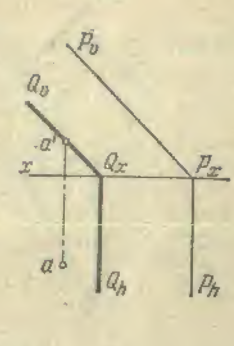


95. a) Es paralela, b) no es paralela, c) es paralela.

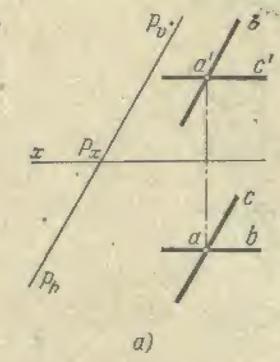
98.



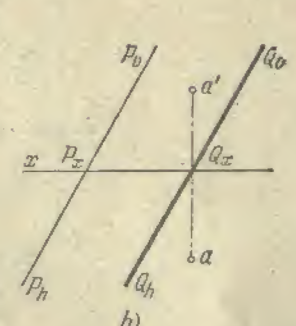
99.



100. a, b.



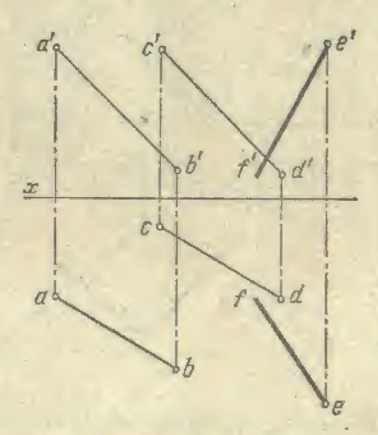
a)



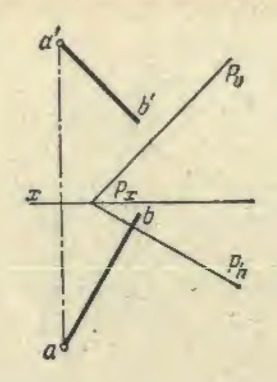
b)

101 No son paralelos.

103.

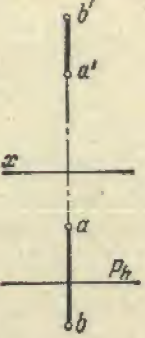


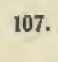
104.



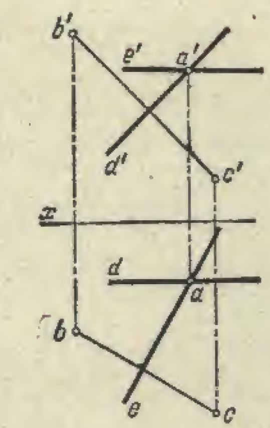
105.



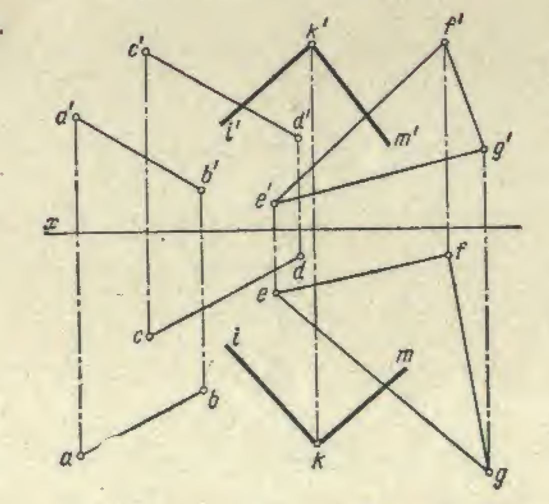




107.

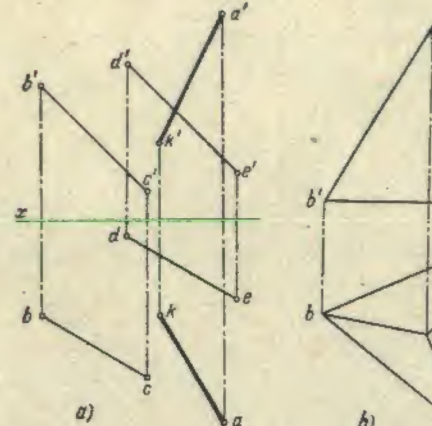


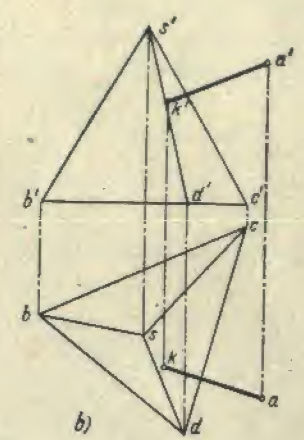
109.

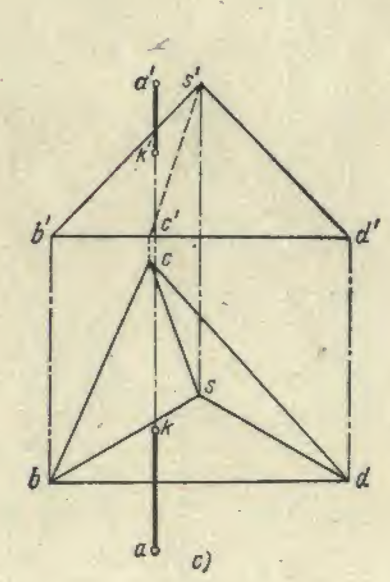


110. a) Los planos son perpendiculares, b) los planos no son perpendiculares.

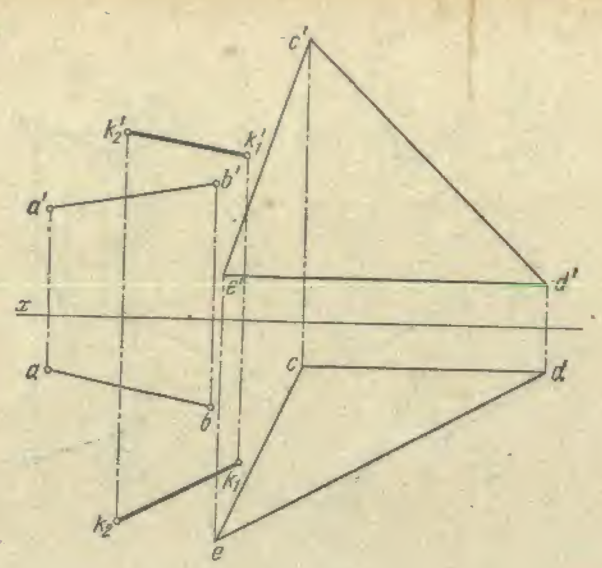
112. a—c.







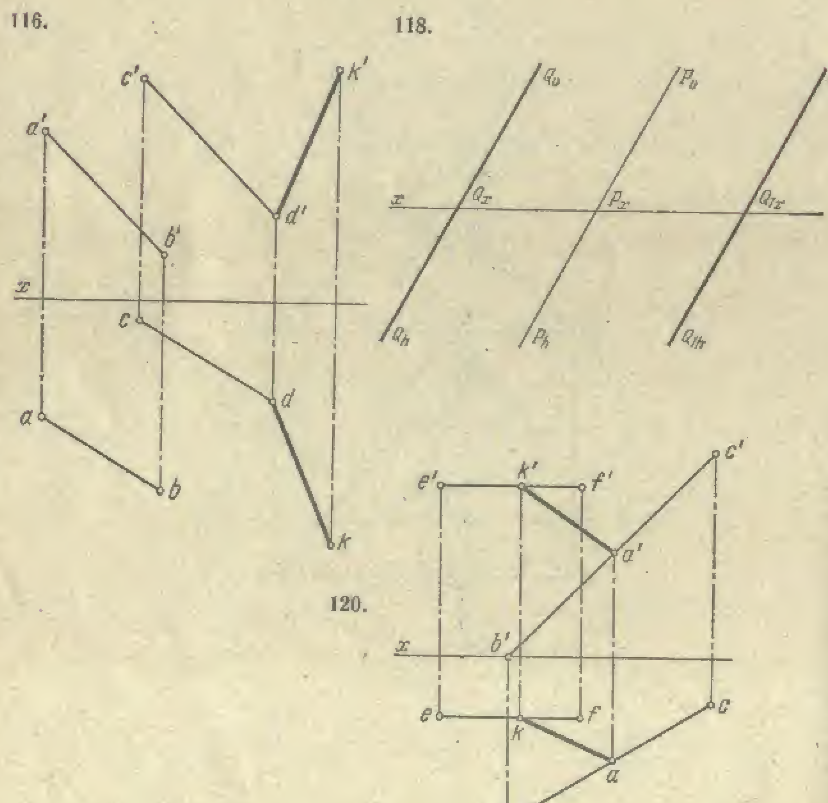
114.



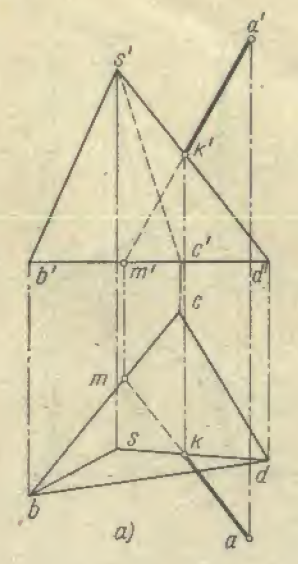
116.

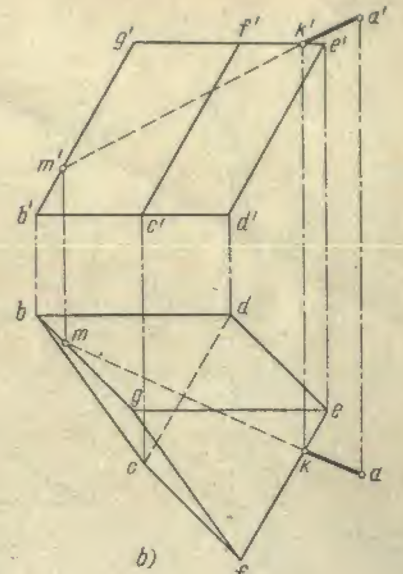
118.

120.

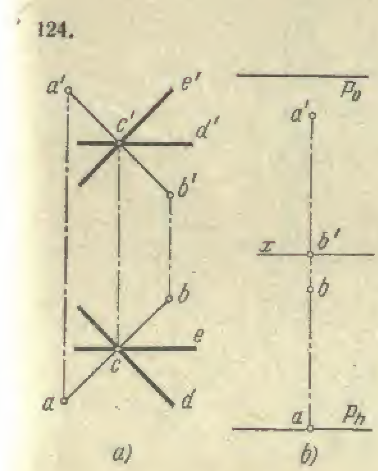


122. a, b.

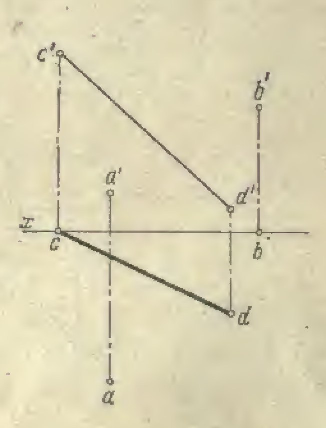




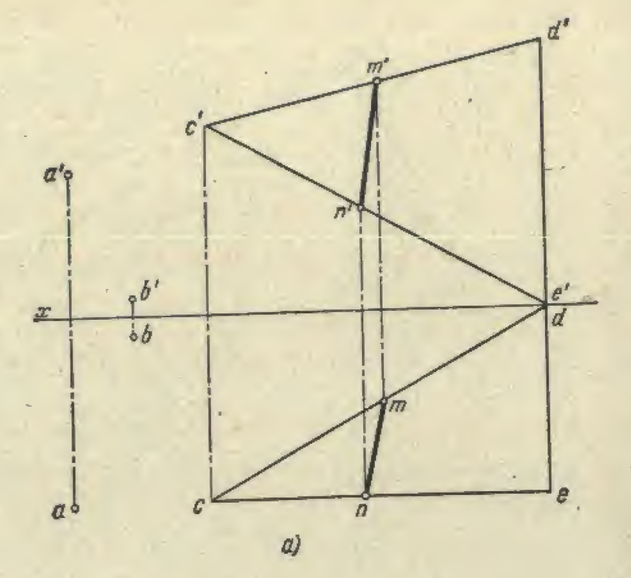
124.



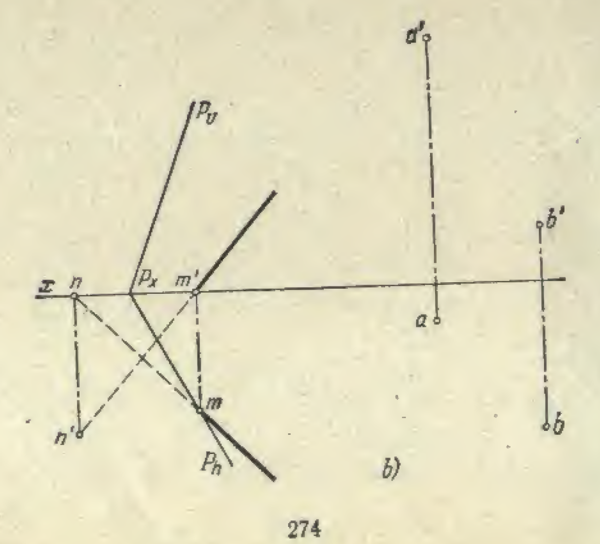
126.



128. a.

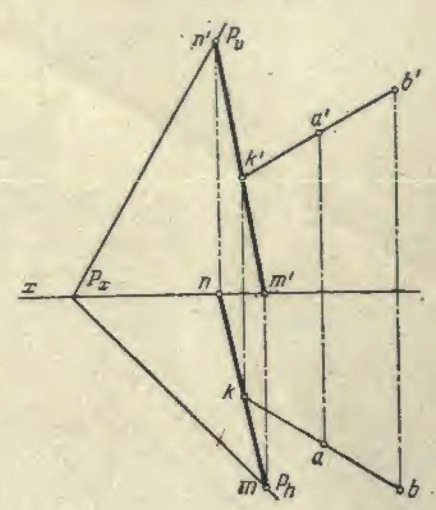


128. b.

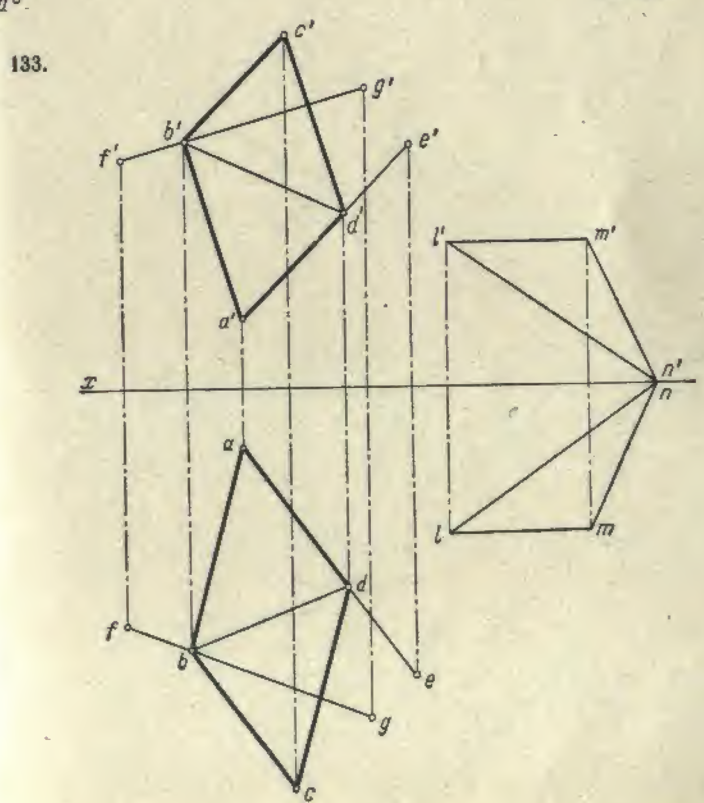


130.

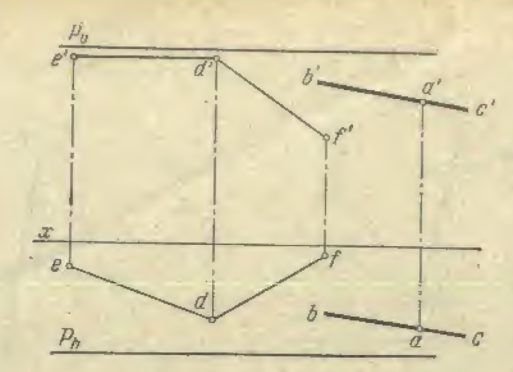
131.



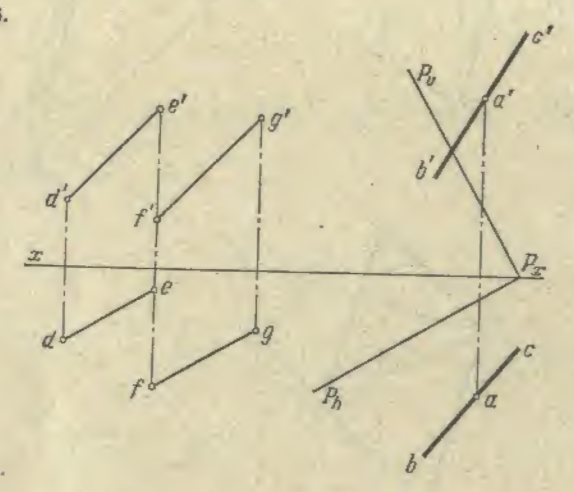
133.



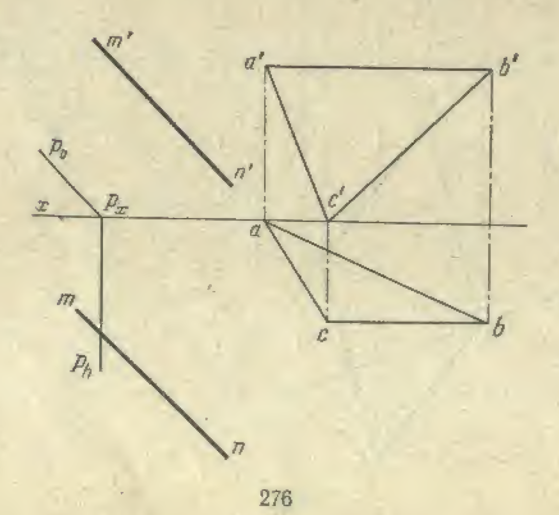
135.



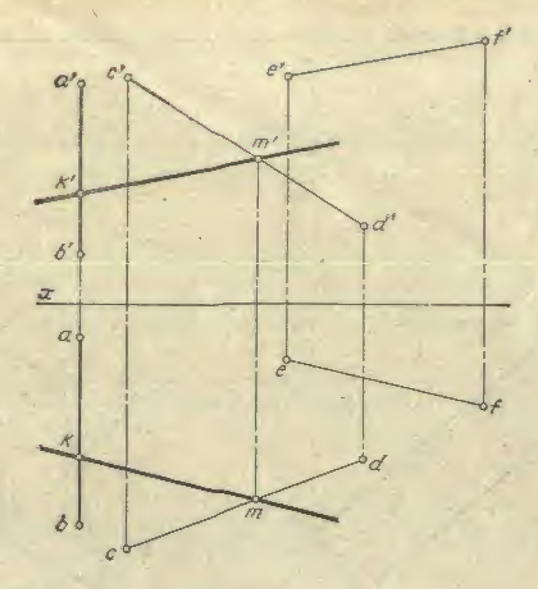
136.



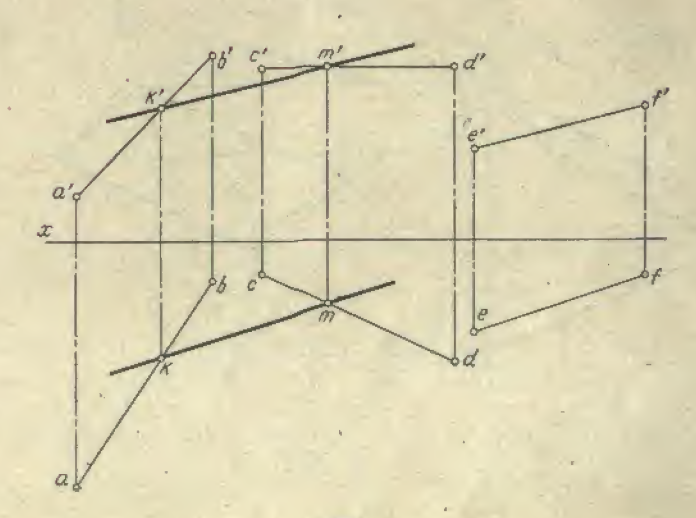
138.



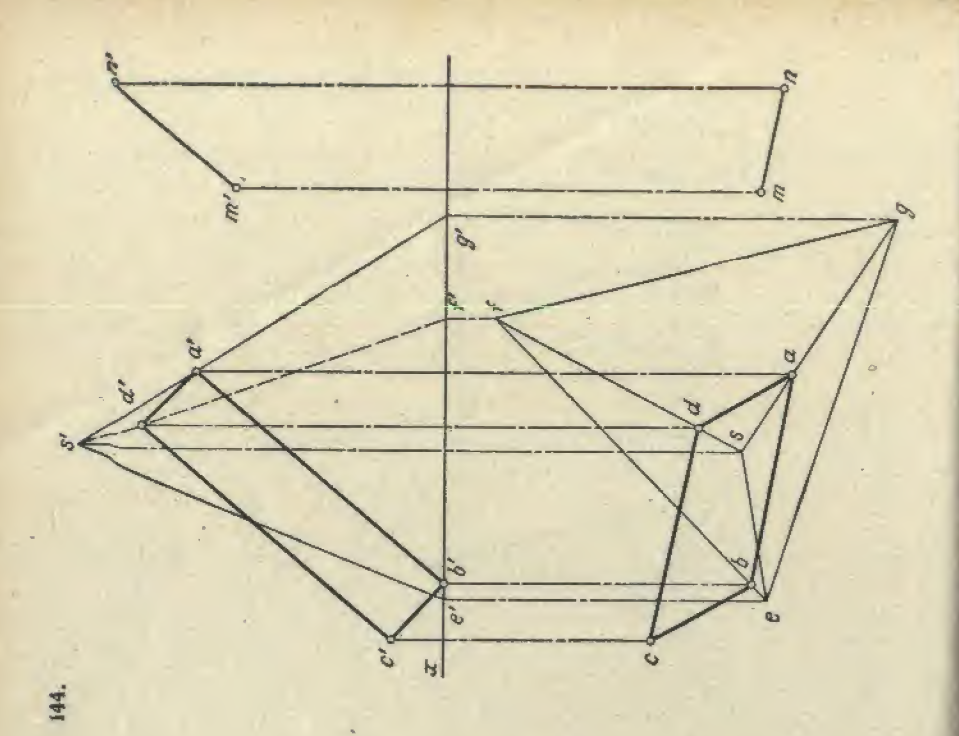
140.



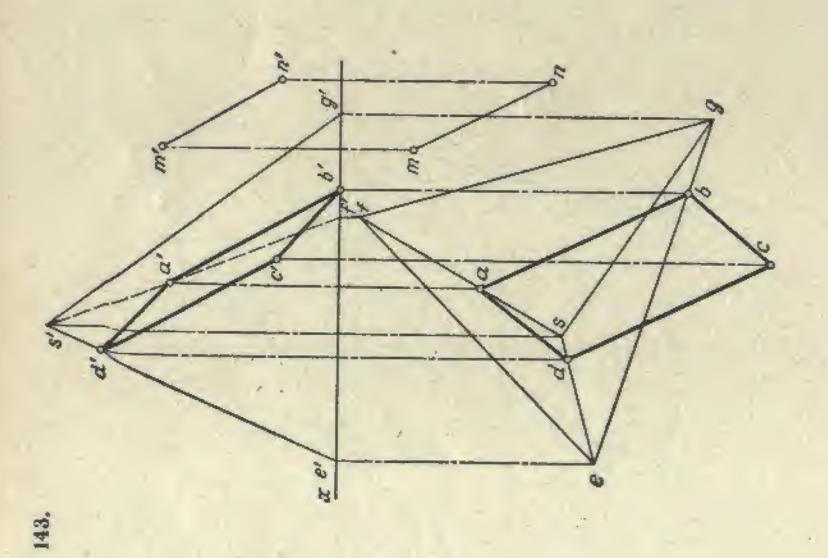
141.



144.



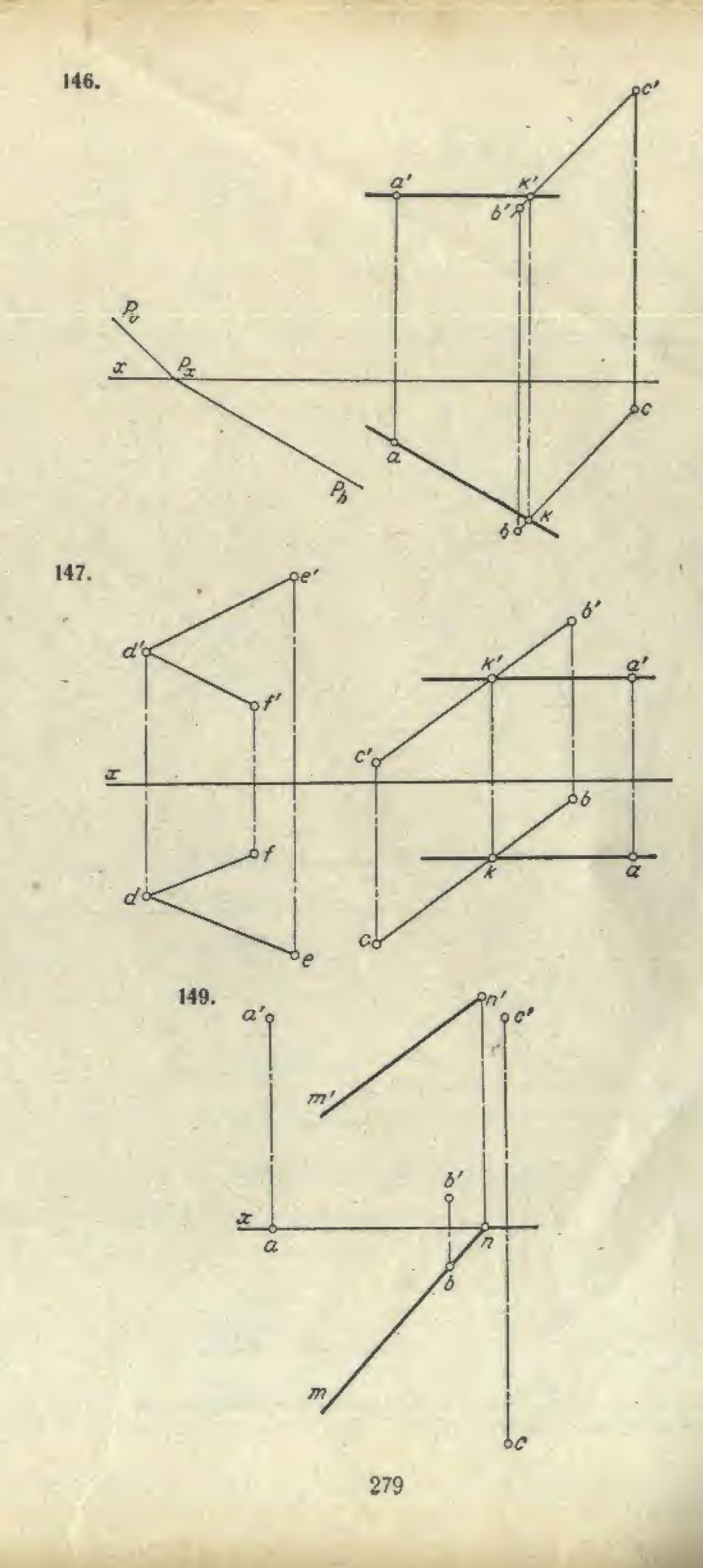
143.



146.

147.

149.



151.

153.

154.

156. mag. ver. AS

mag. ver. BS

mag. ver. CS

mag. ver. DS

158. de B a AC

de S a BC

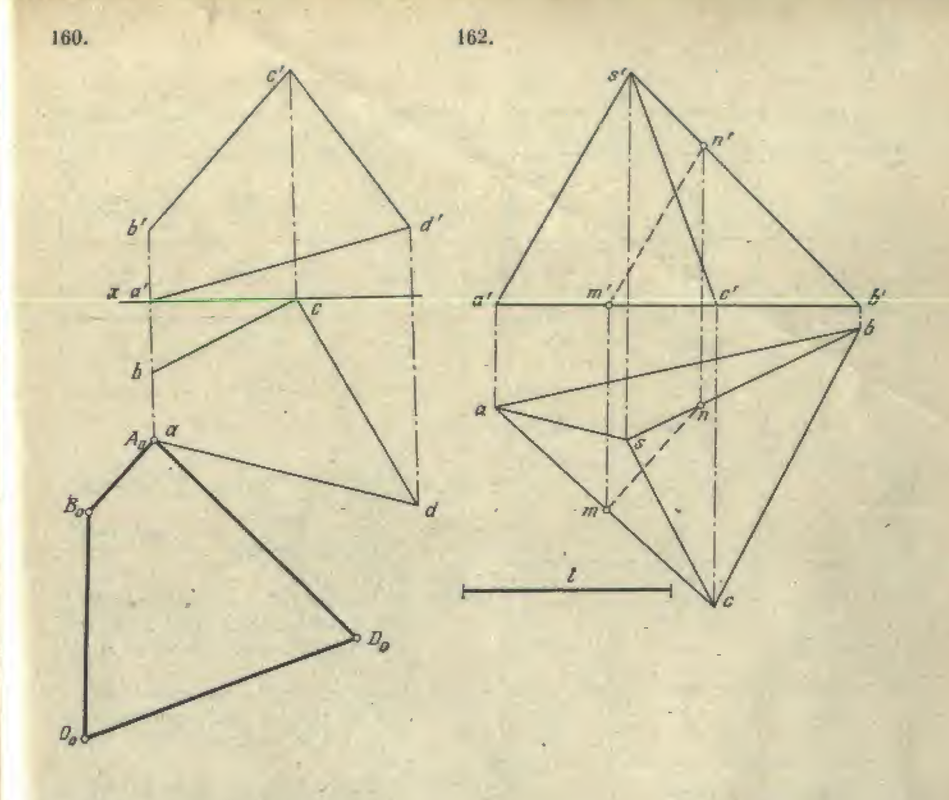
de S a AB

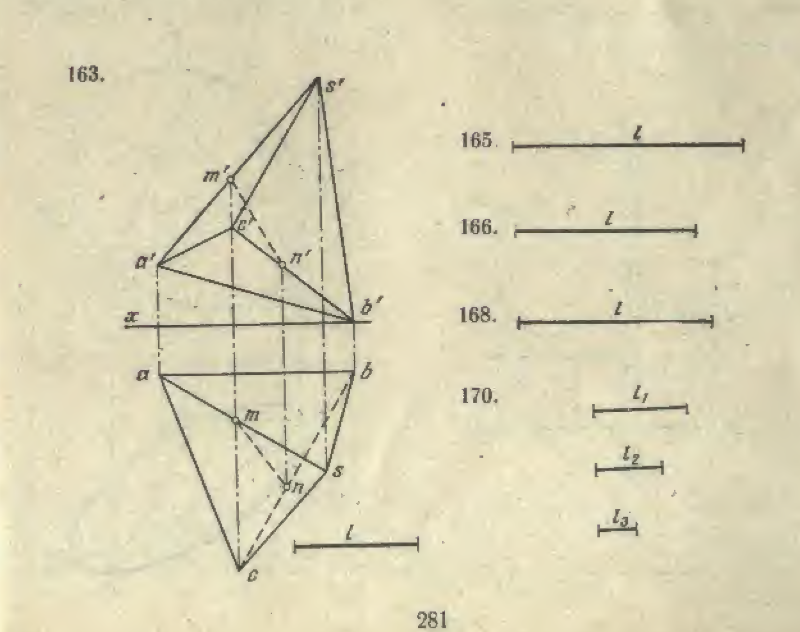
de S a AC

159. AD y CF

BE y CF

AD y BE





172.

Arista	Angulo	
	α	β
AS	70°	9°
BS	65°	24°
CS	50°30′	14°
DS	53°30′	29°

174.

Cara	Angulo	
	α	β
SAB	57°	22°30′
SAC	51°30′	72°
ABC	24°30′	73°

175.

Cara	Angulo	
	α	β
ABCD	—	30°
CDHG	—	58°
ADEH	45°30′	—

177. $\angle ASB = 17°30'$, $\angle BSC=20°$, $\angle CSA=37°30'$.

178. $\angle HCD=131°$, $\angle CDG=49°$, $\angle BAC = 61°30'$.

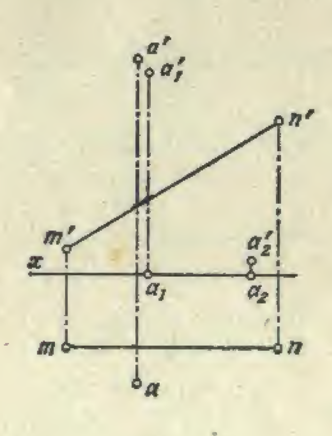
180. a) 73°; b) 82°.

182. El ángulo que forma la cara *ABC* con la arista *AS* es igual a 46°, con la arista *BS*, a 46°, y con la arista *CS*, a 70°.

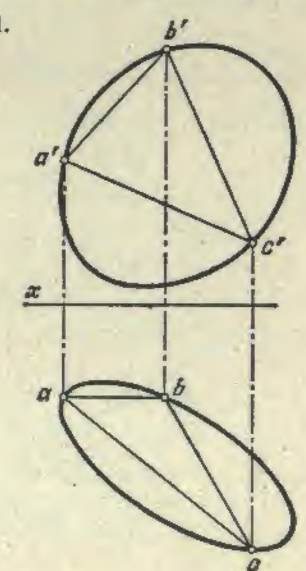
185. El ángulo entre las caras *SAB* y *SBC* es igual a 108°, entre *SBC* y *SCD*, a 104°, y entre *SAD* y *SAB*, a 89°.

186. El ángulo entre las caras *CDHG* y *EFGH* es igual a 28°, y entre las caras *BCGF* y *CDHG* es igual a 24°.

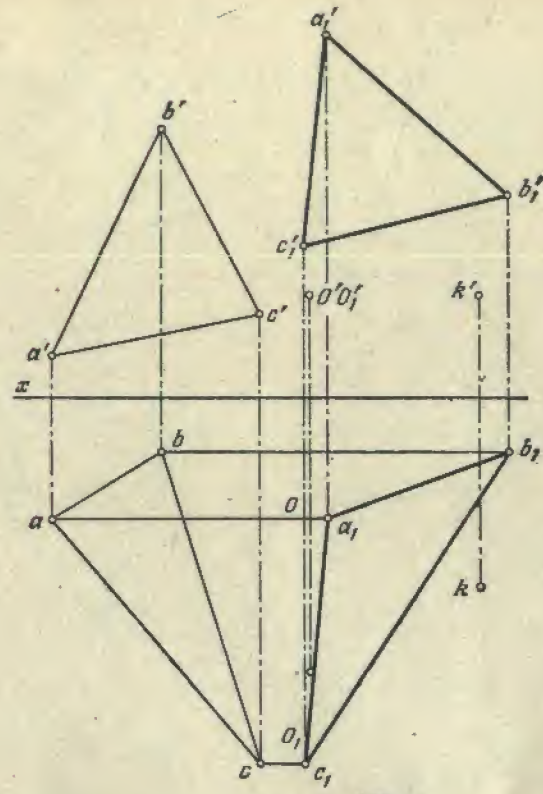
188.



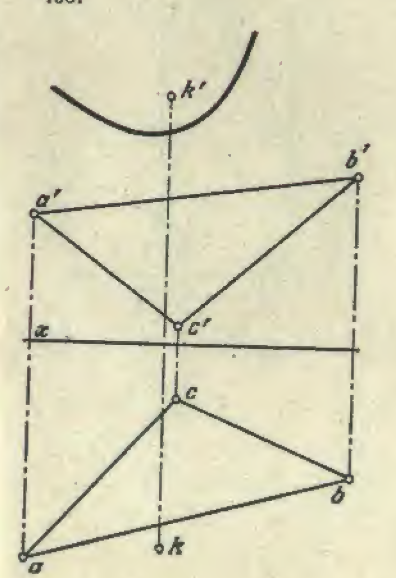
191.



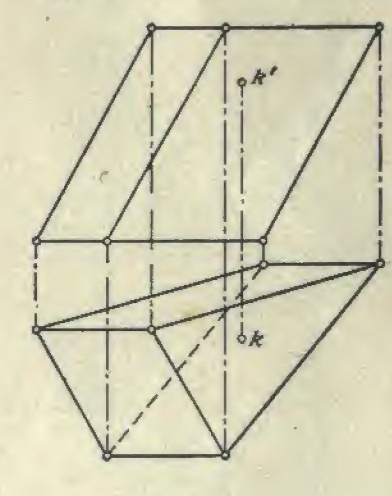
193.



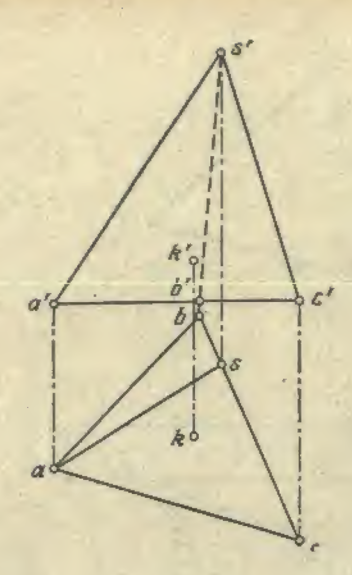
195.



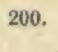
197.

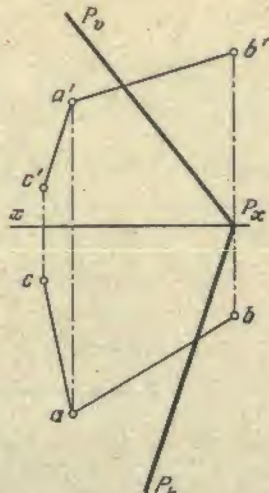


198.

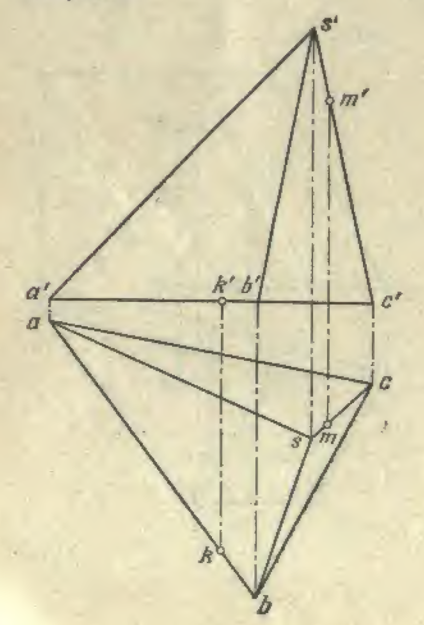


200.

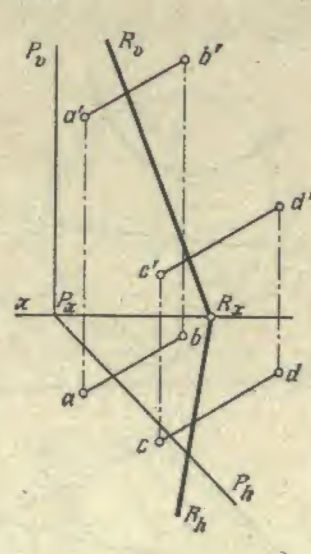




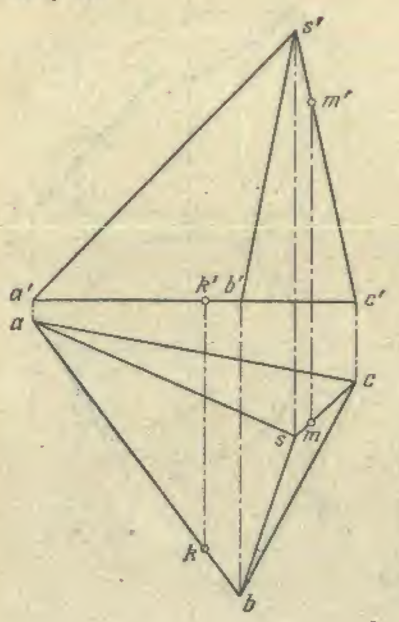
202 y 203.



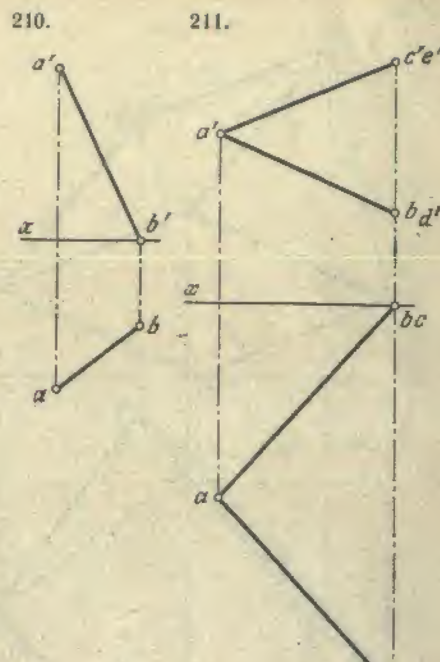
205.



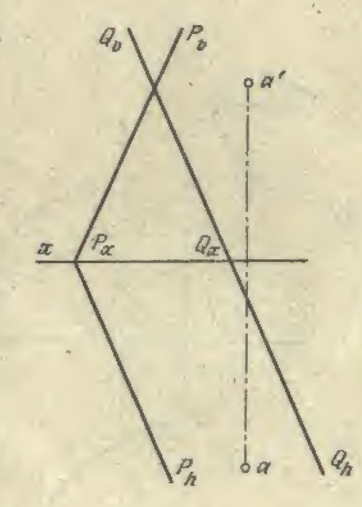
207 y 208.



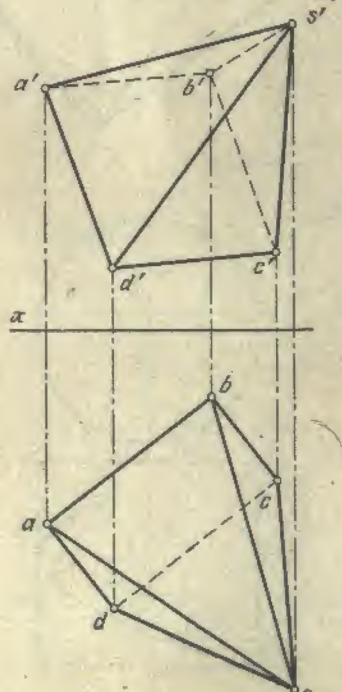
210. 211.



213.



215.



217.

219.

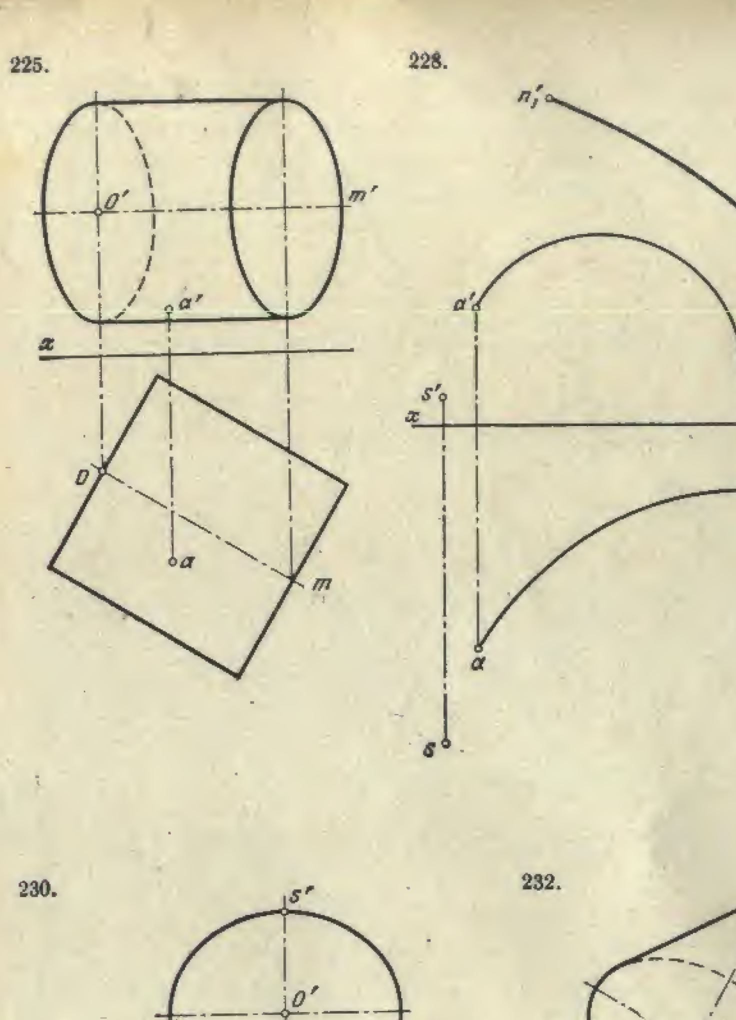
221.

mag.ver.AB

223.

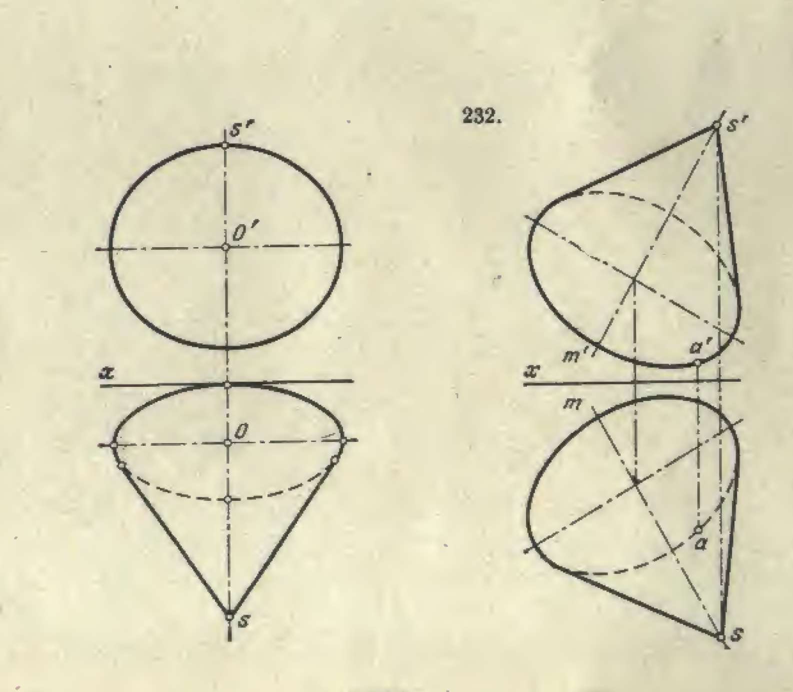
225.

228.

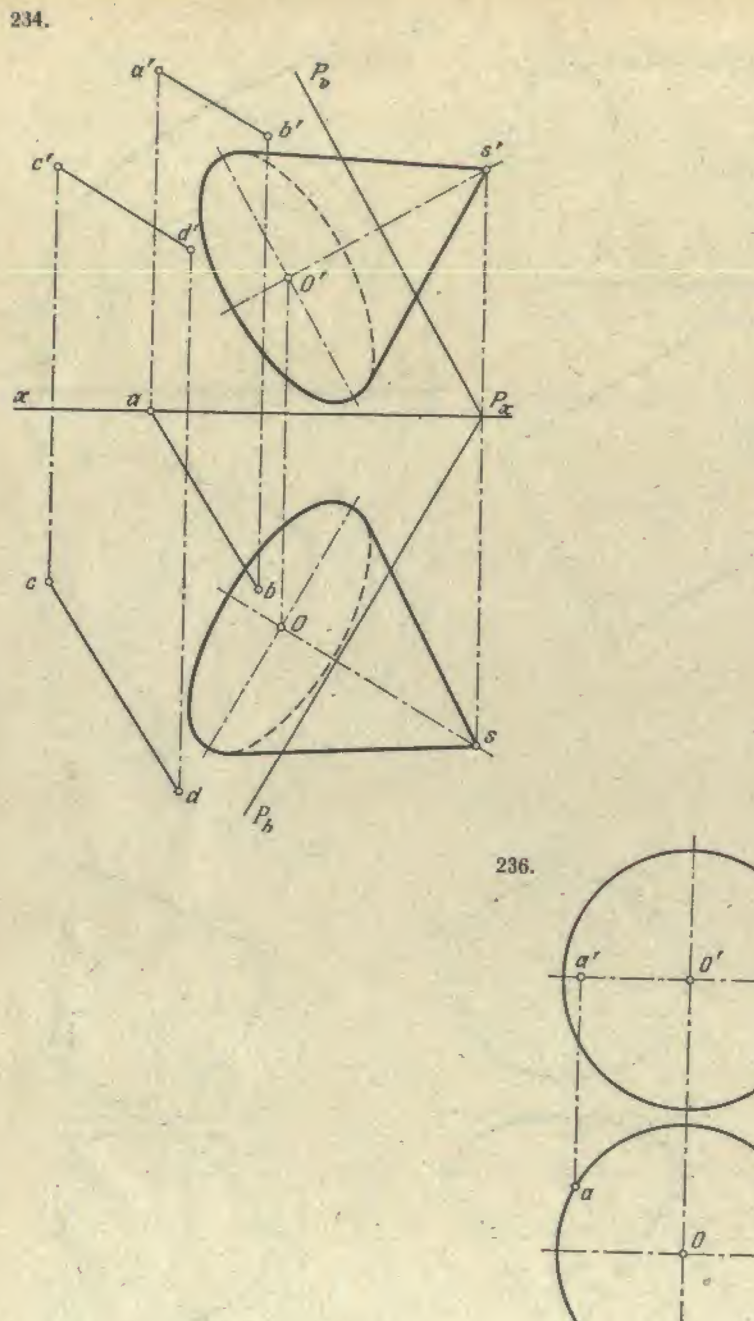


230.

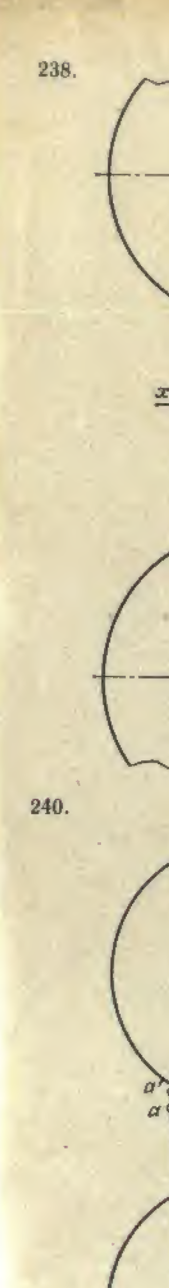
232.



234.



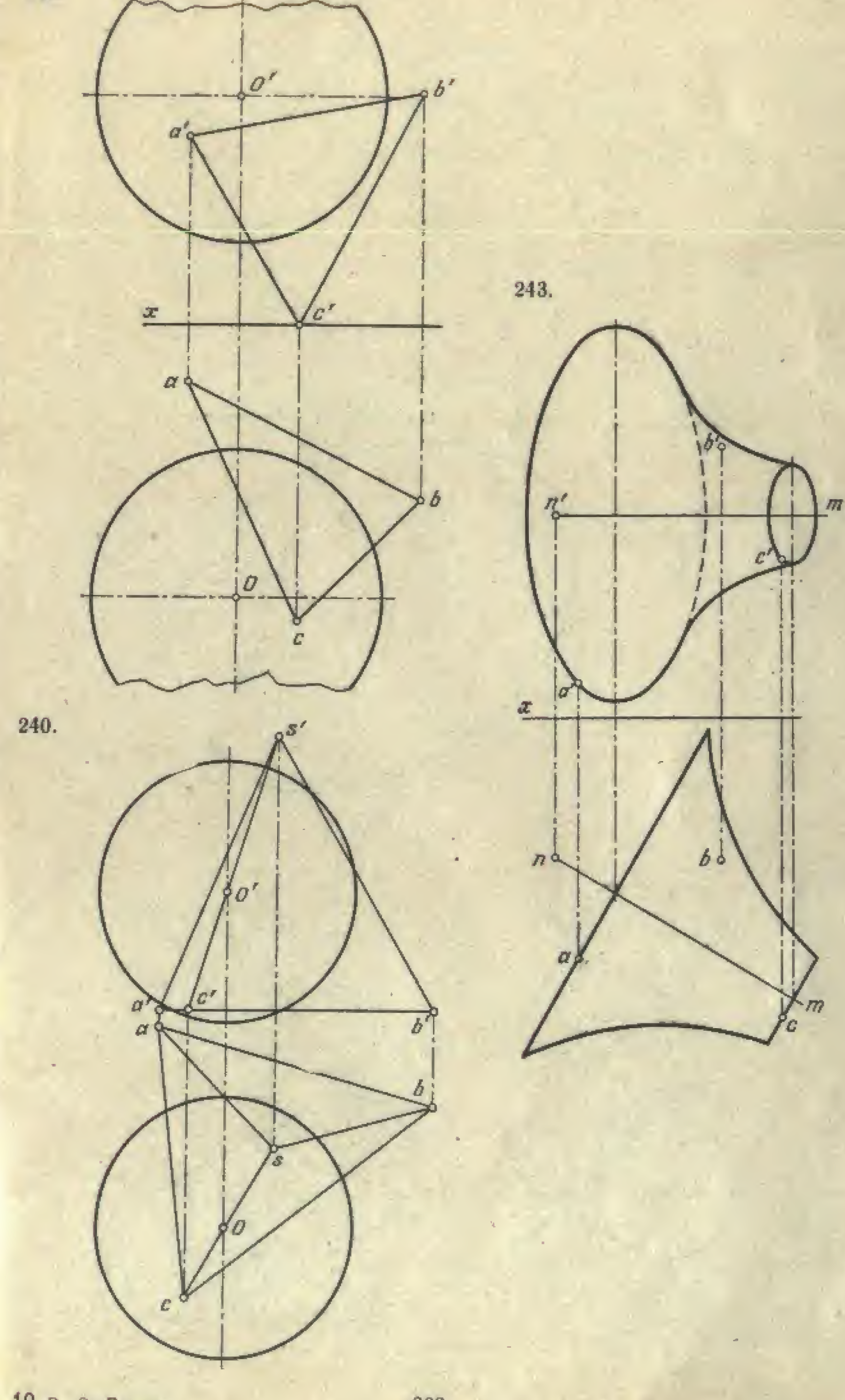
236.



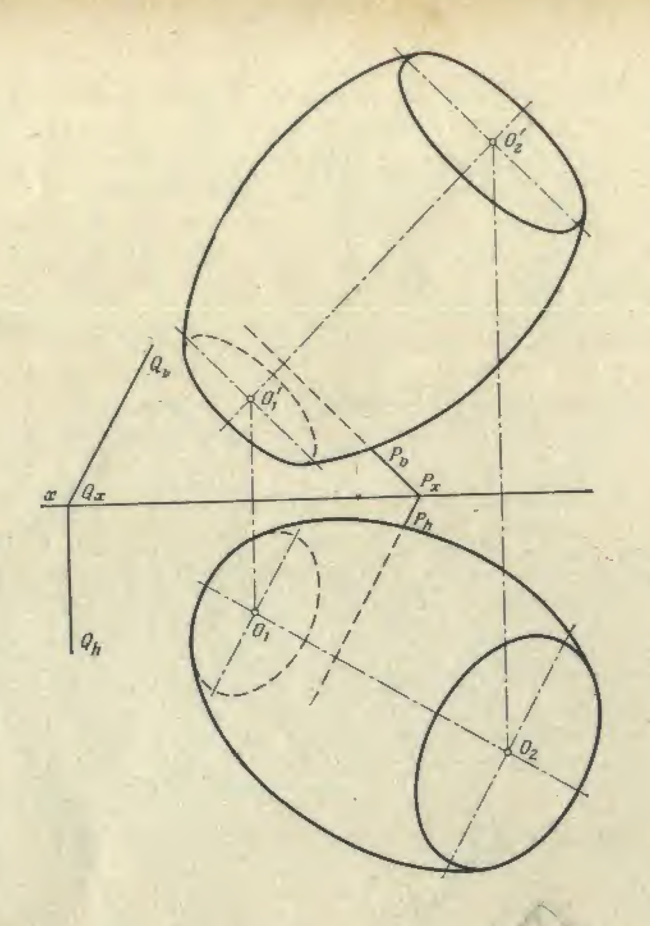
238.

240.

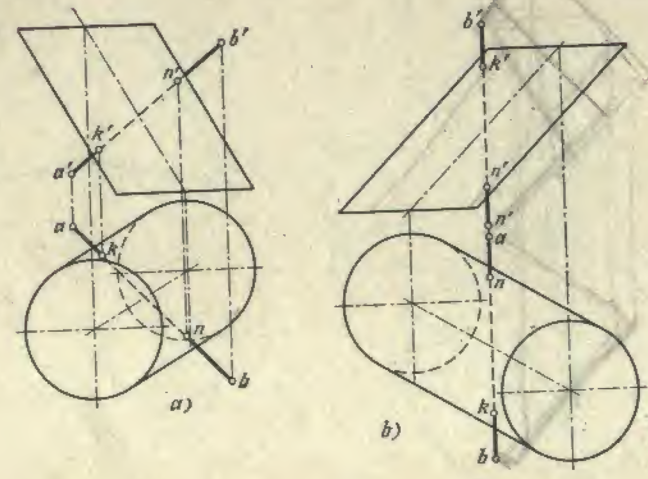
243.



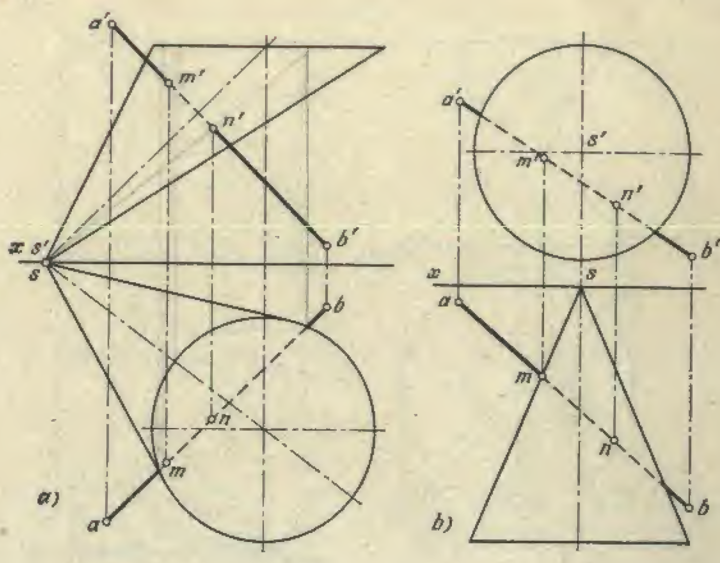
245.



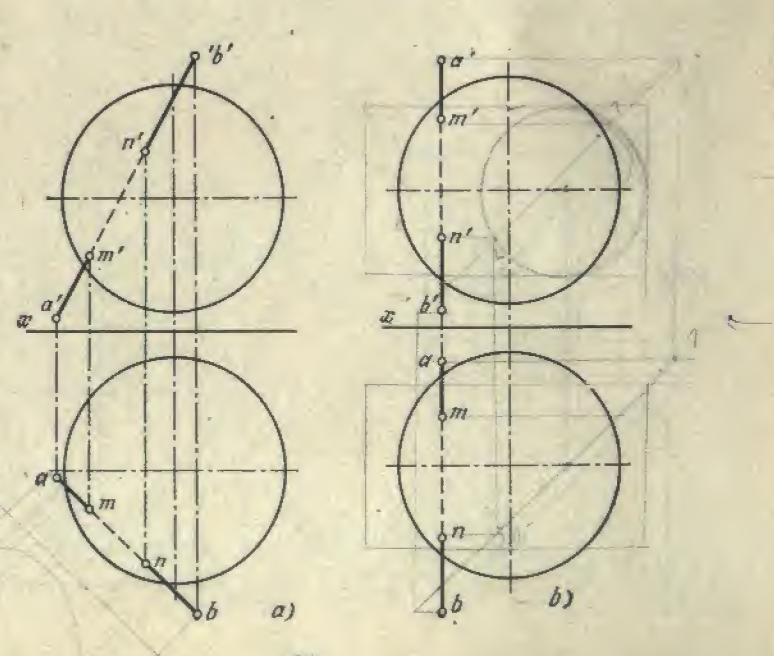
249. a, b.



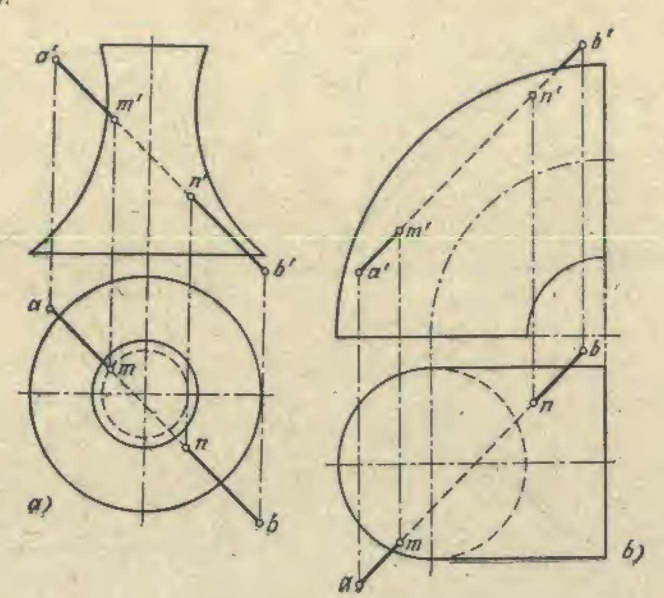
252. a, b.



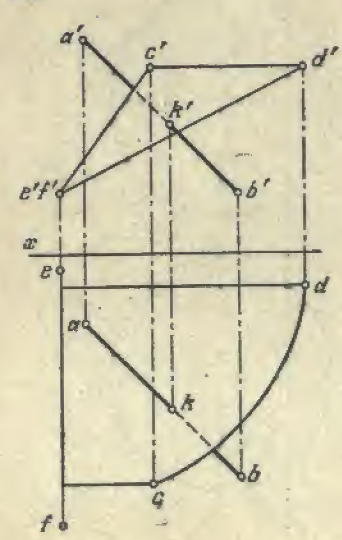
254. a, b.



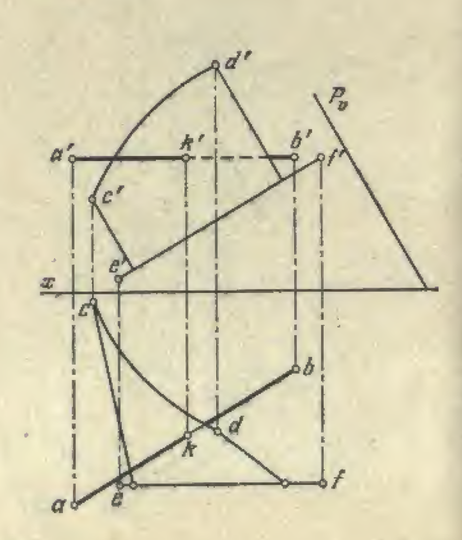
256. a, b.



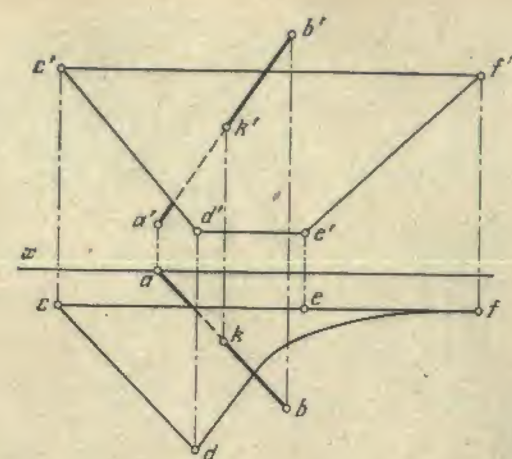
258.



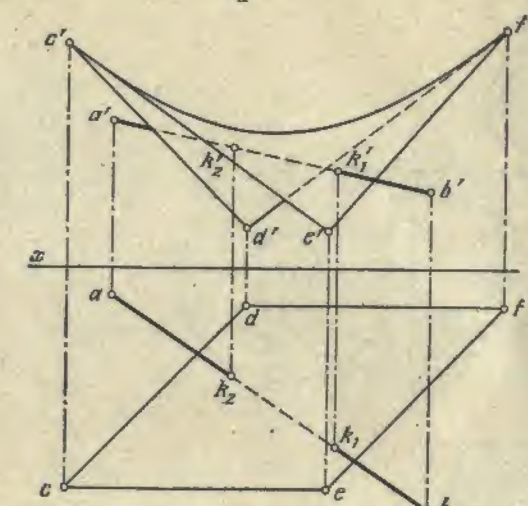
259.



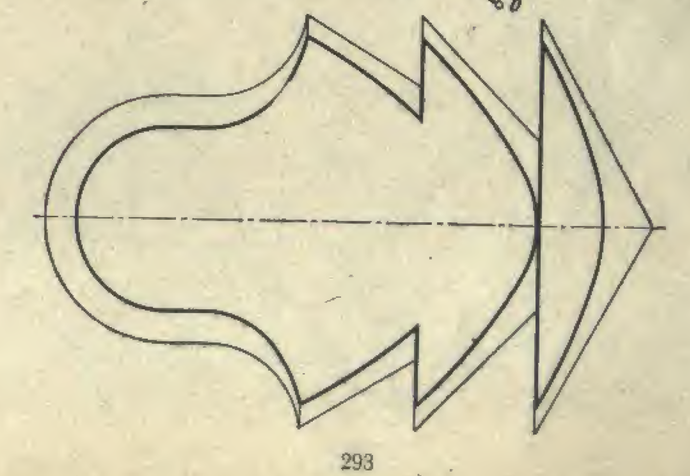
261.

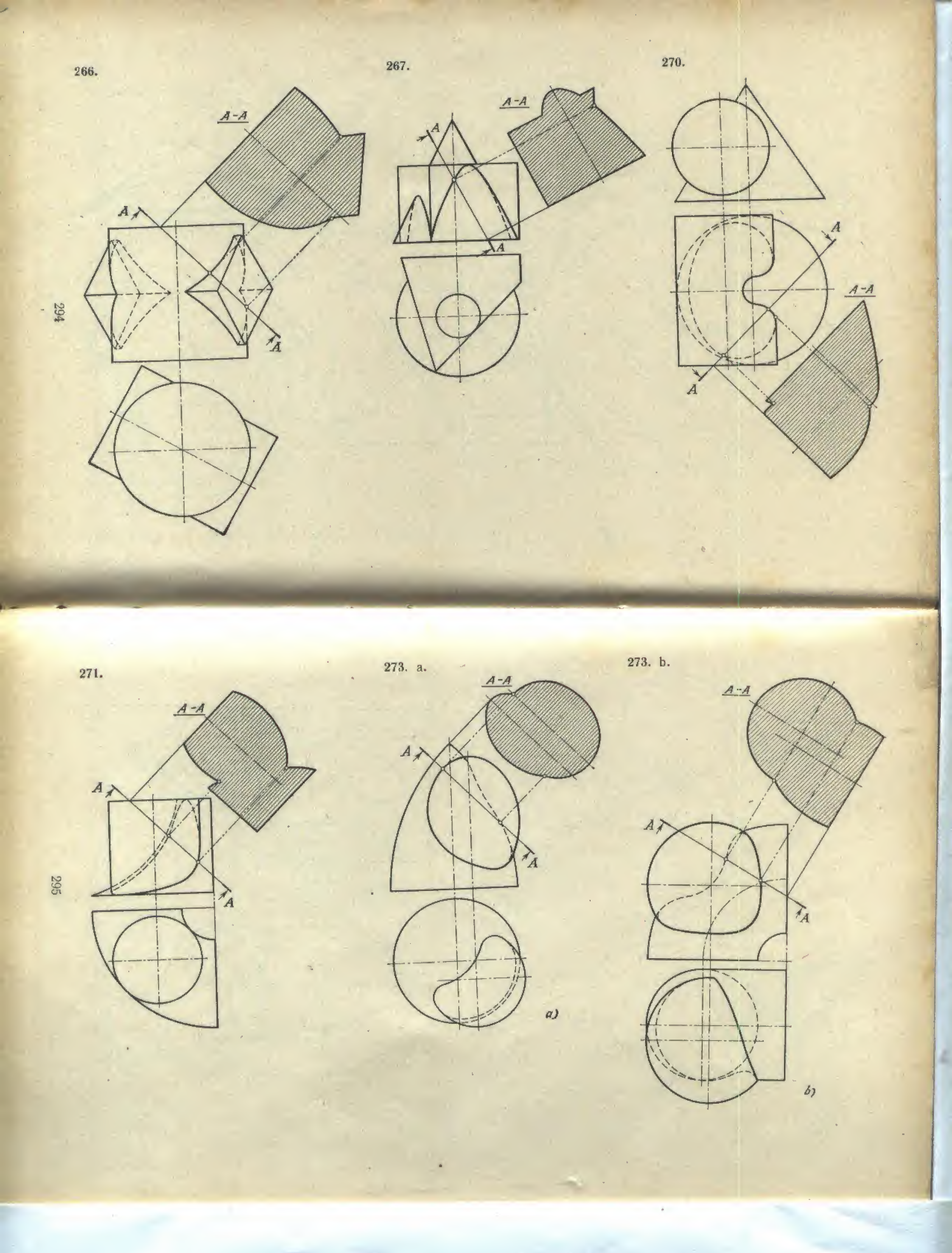


262.



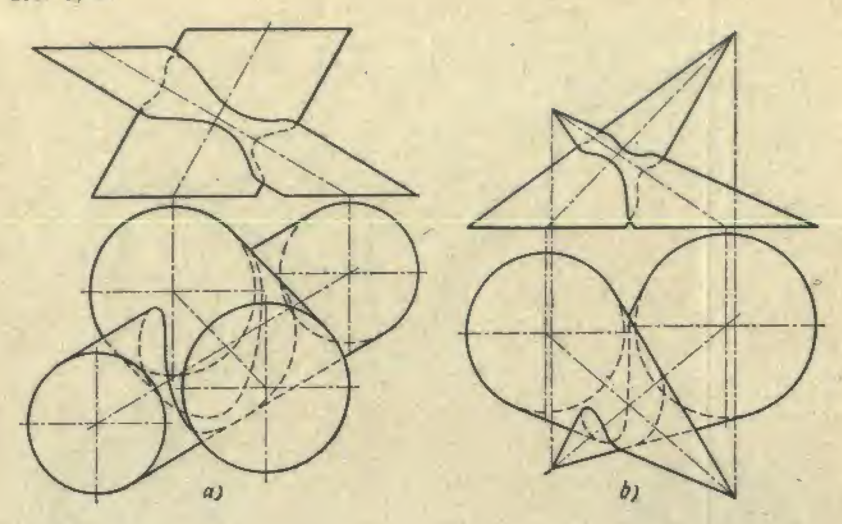
264.



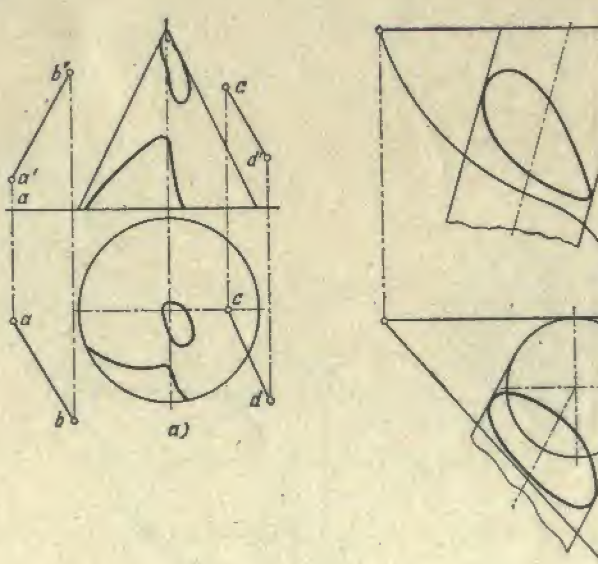


266.
A-A
A
A
267.
A-A
A
A
270.
A-A
A
A
271.
A-A
A
A
273. a.
A-A
A
A
a)
273. b.
A-A
A
A
b)

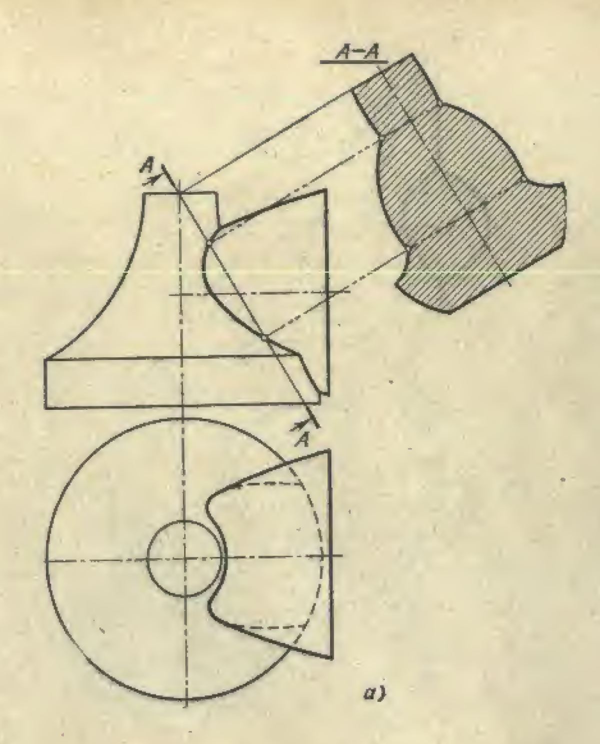
275. a, b.



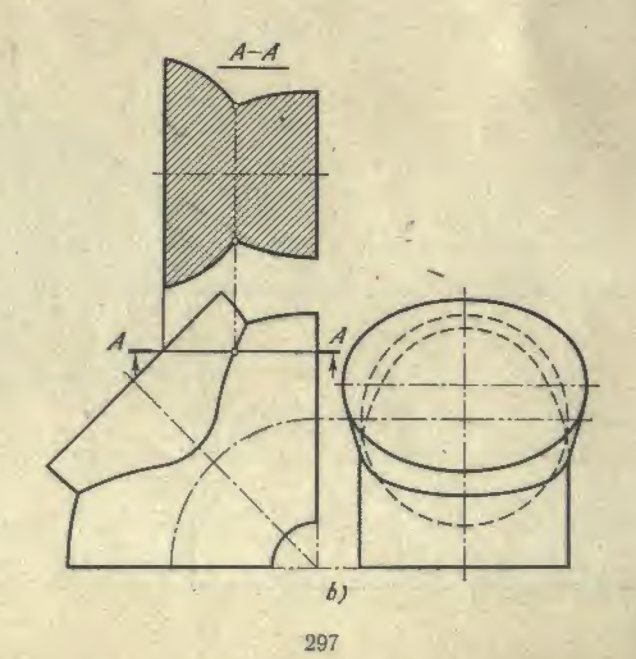
277. a, b.



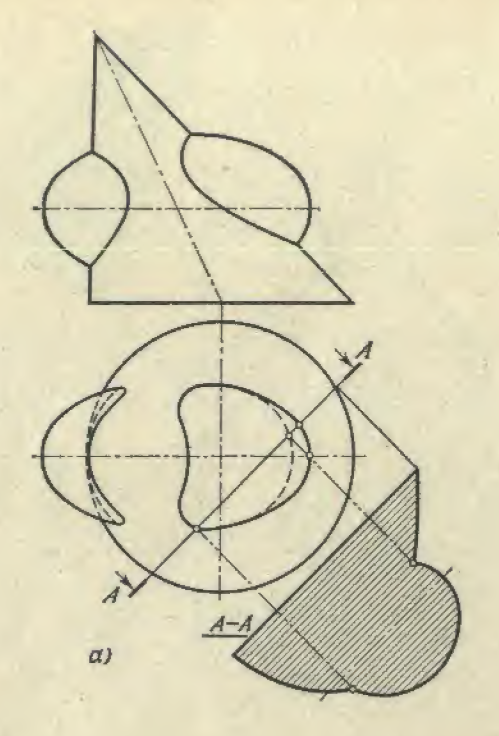
279. a.



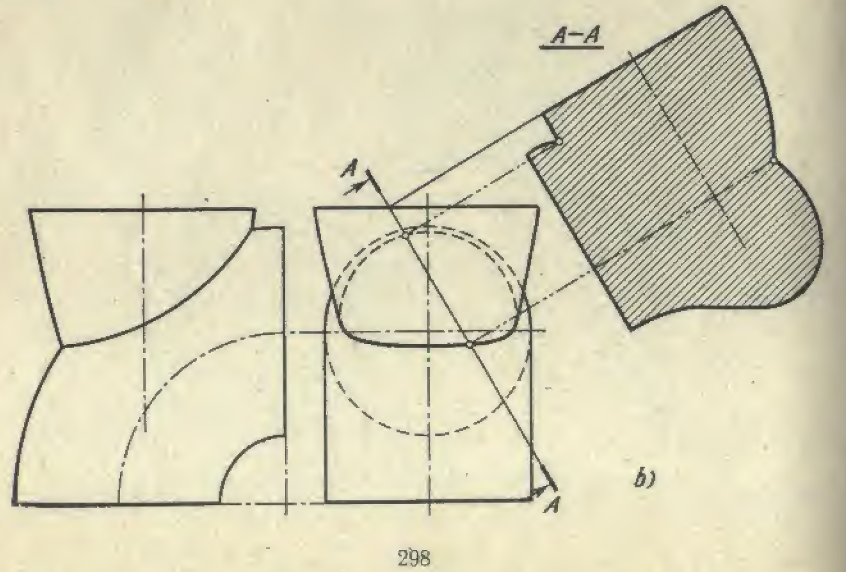
279. b.



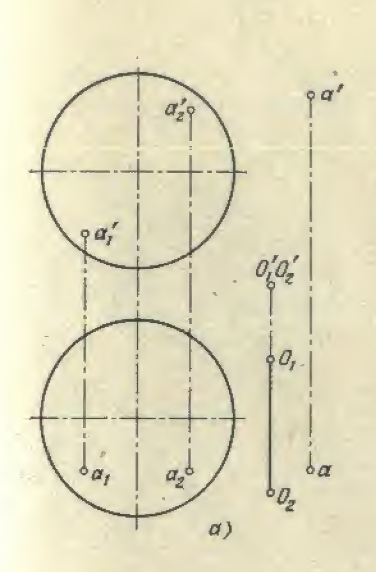
281. a.



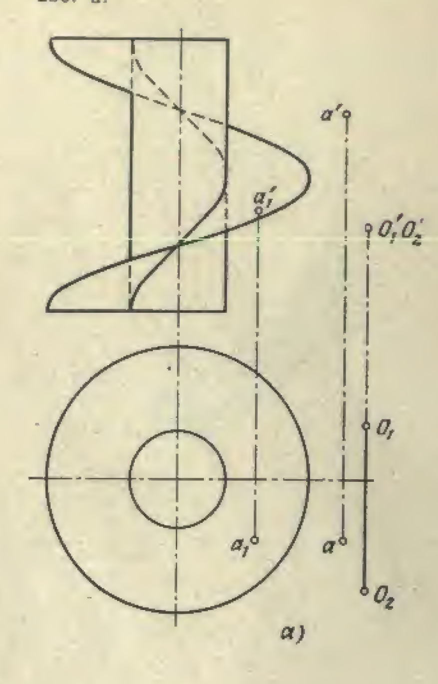
281. b.



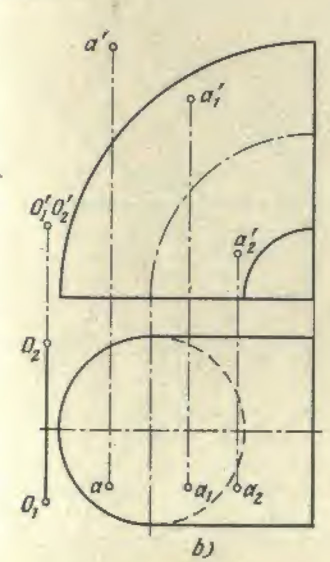
284. a.



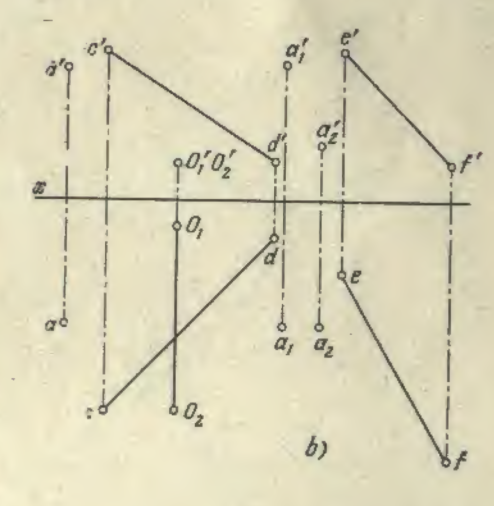
286. a.



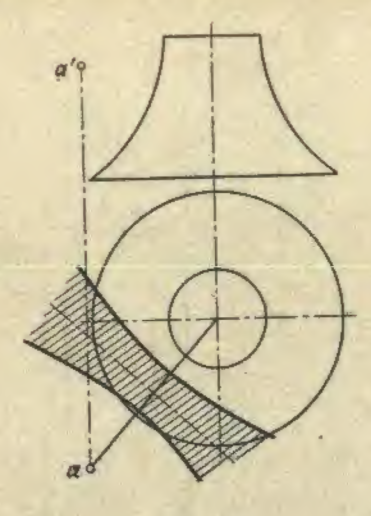
284. b.



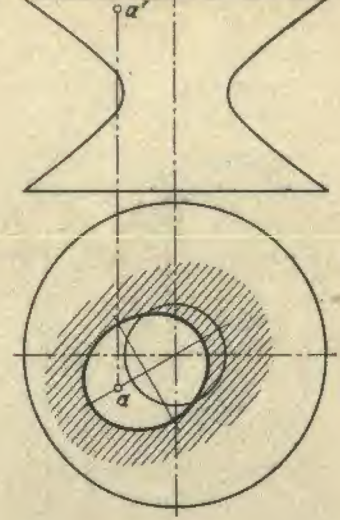
286. b.



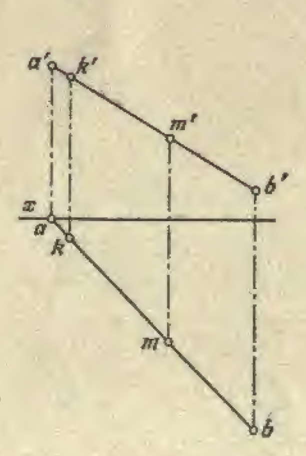
288.



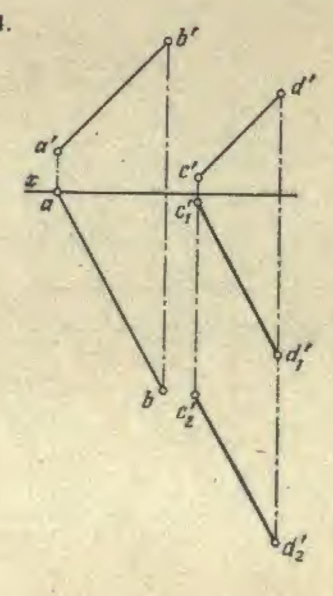
290.



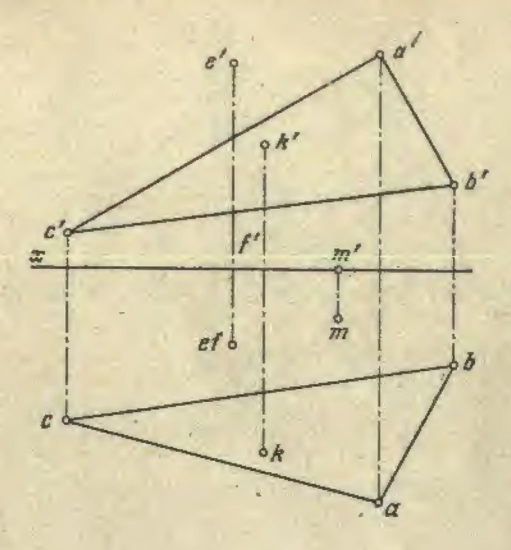
292.



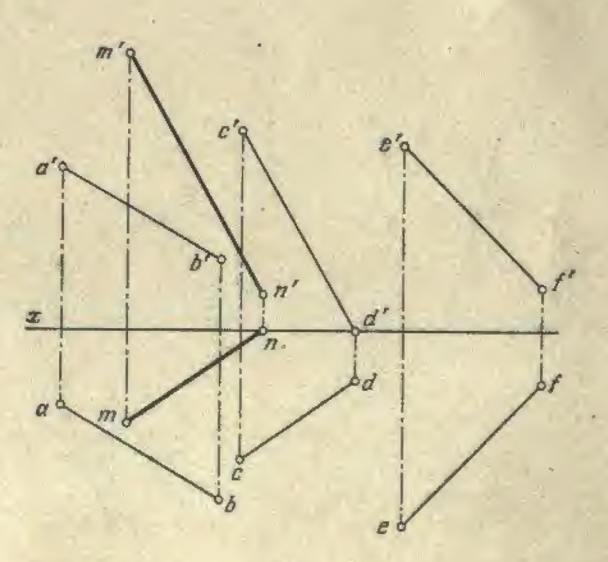
294.



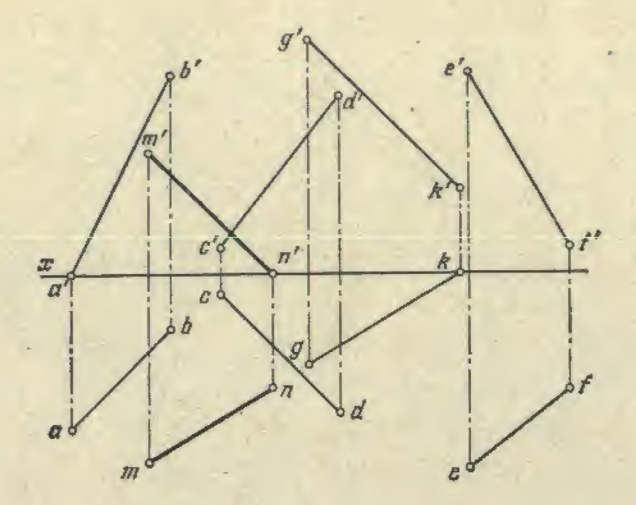
296.



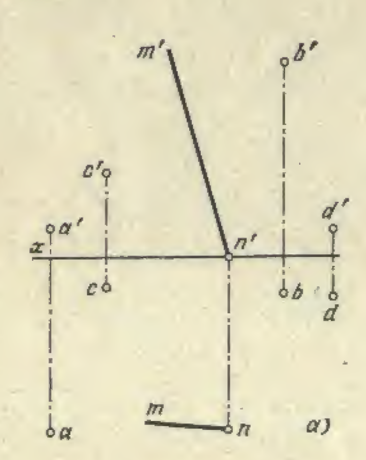
298.

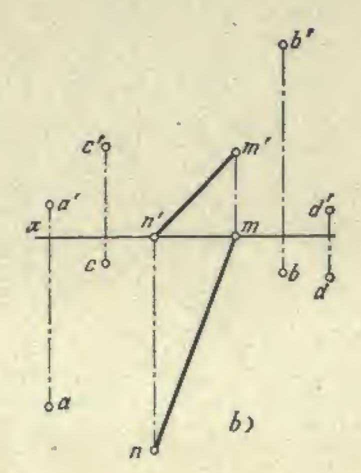


300.

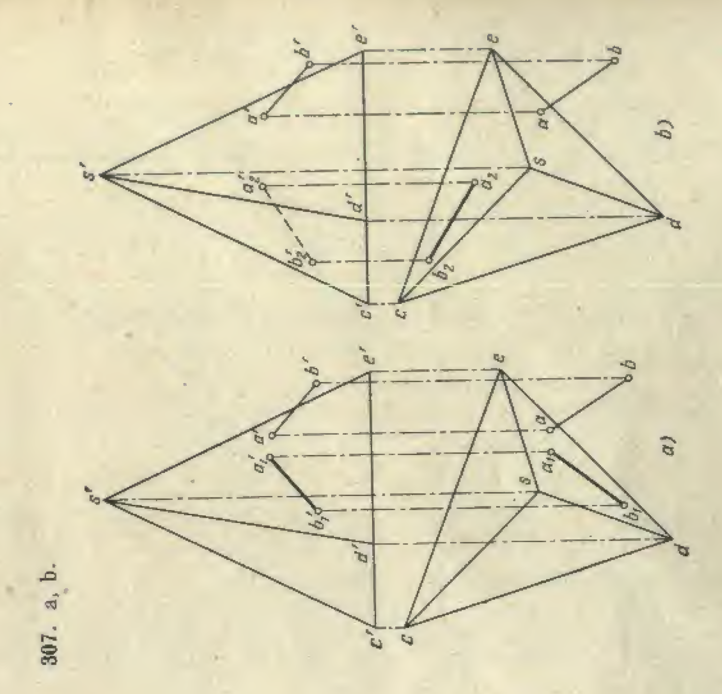


302. a, b.

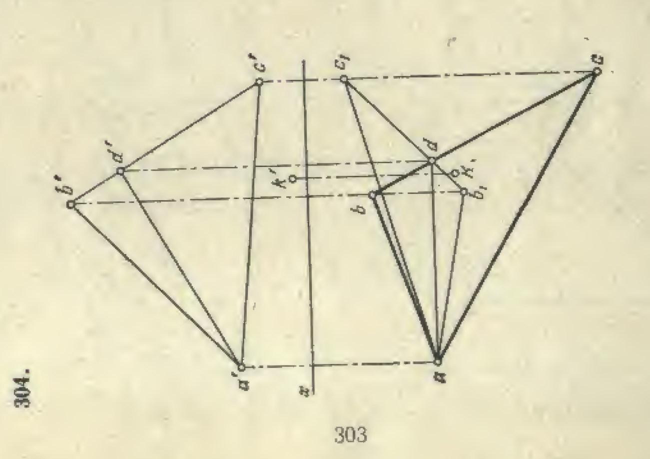




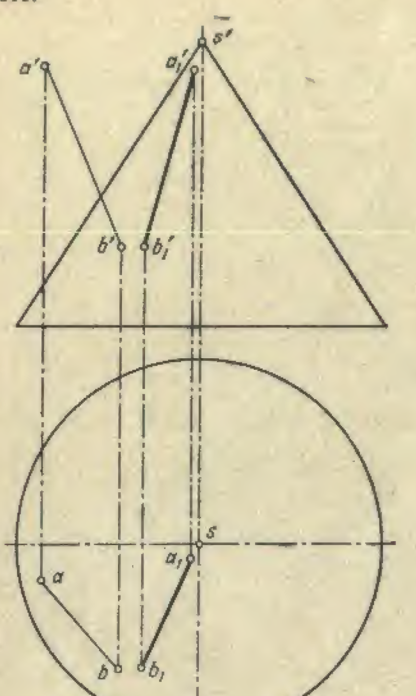
307. a, b.



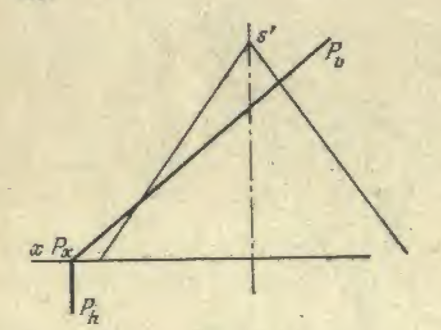
304.



310.

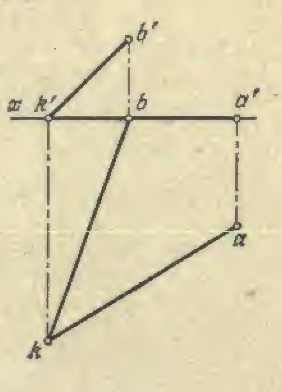


314.

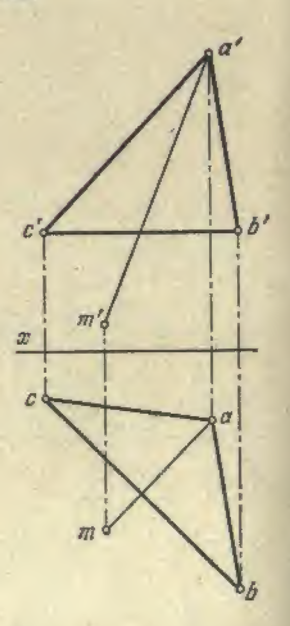


315. No, no se proyecta.

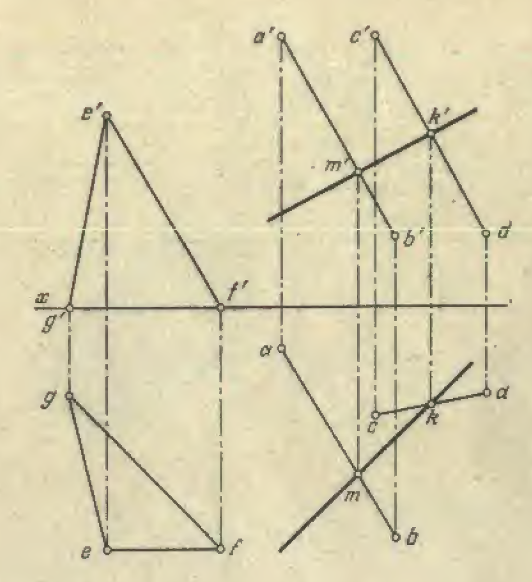
312.



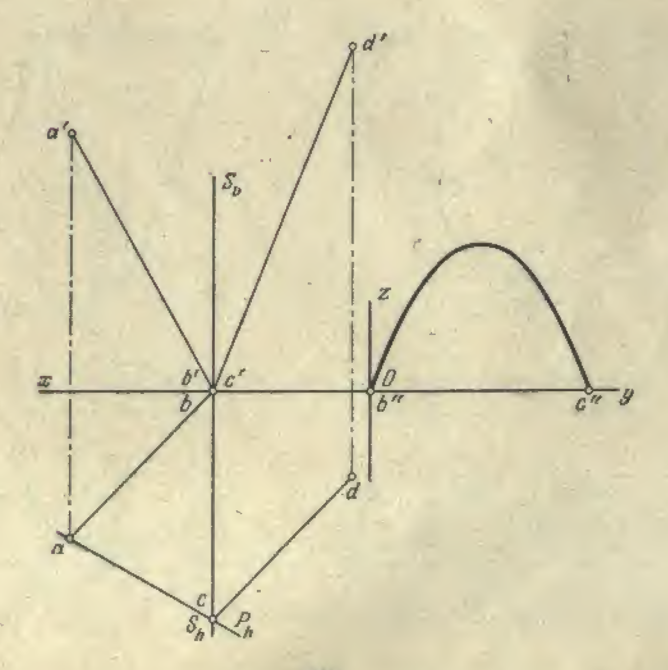
316.



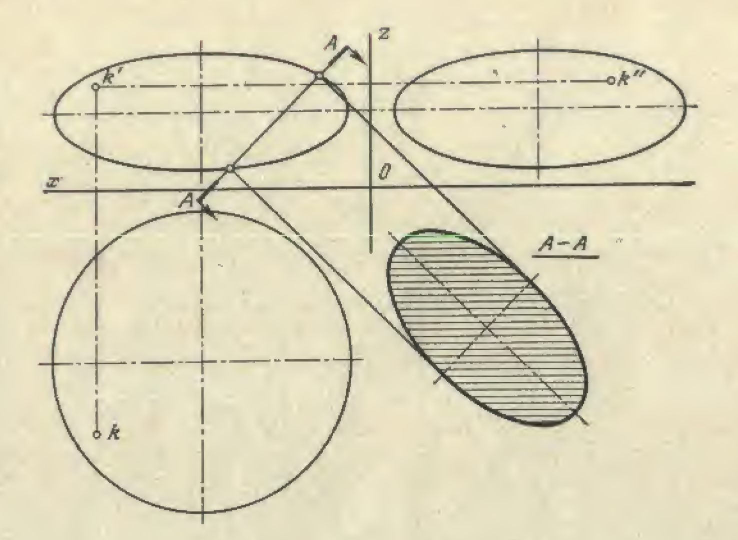
317.



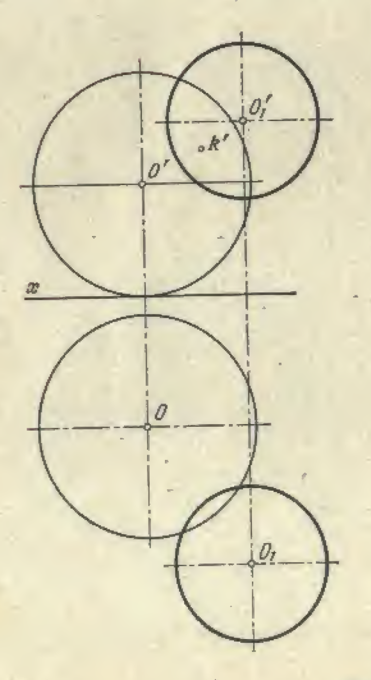
318.



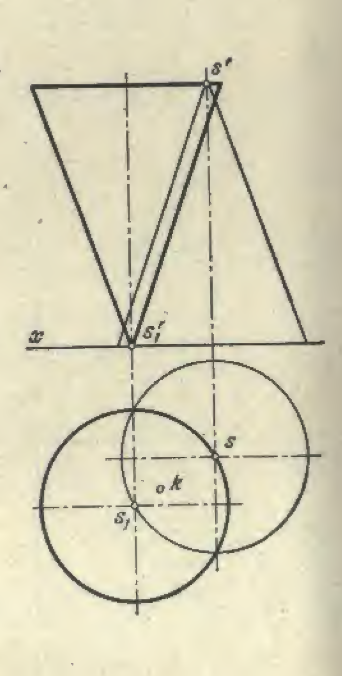
319.



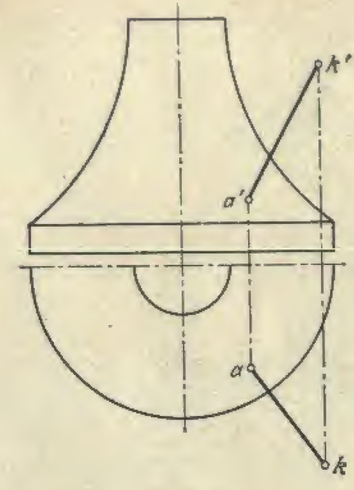
320.



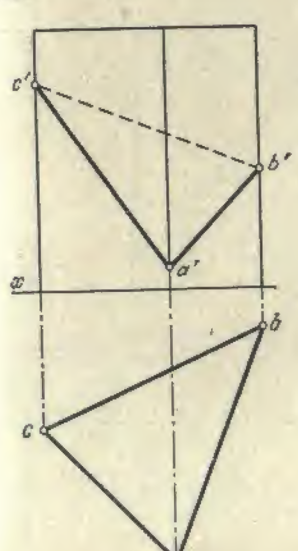
321.



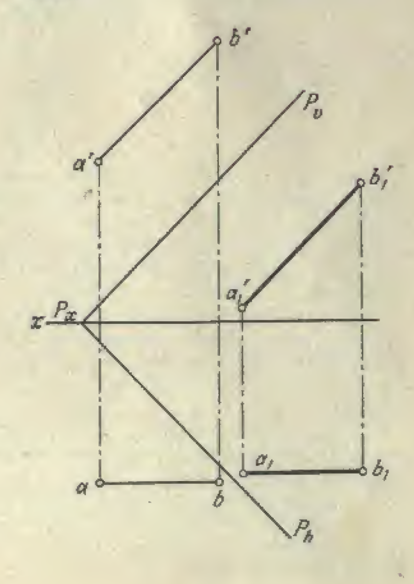
322.



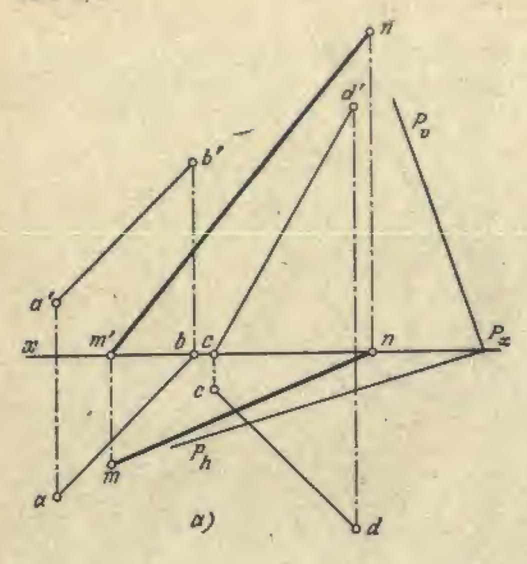
323.

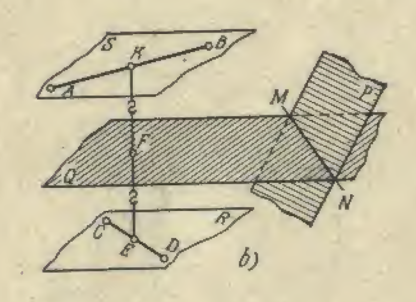


324.



325. a, b.



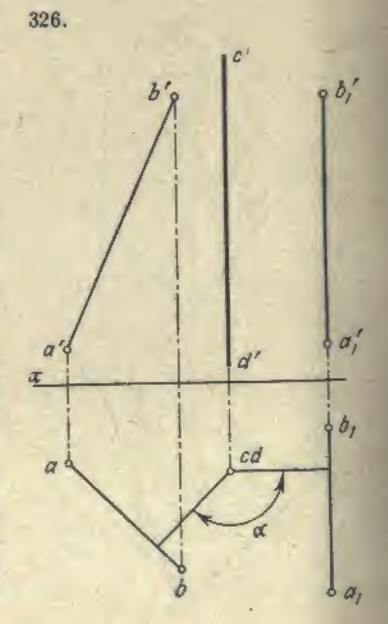


El lugar geométrico buscado es la recta MN de intersección del plano P con el plano Q (fig. b de la respuesta). El plano Q es paralelo a ambas rectas dadas y pasa por el punto F, que es el punto medio del segmento EK de la perpendicular común a las rectas.

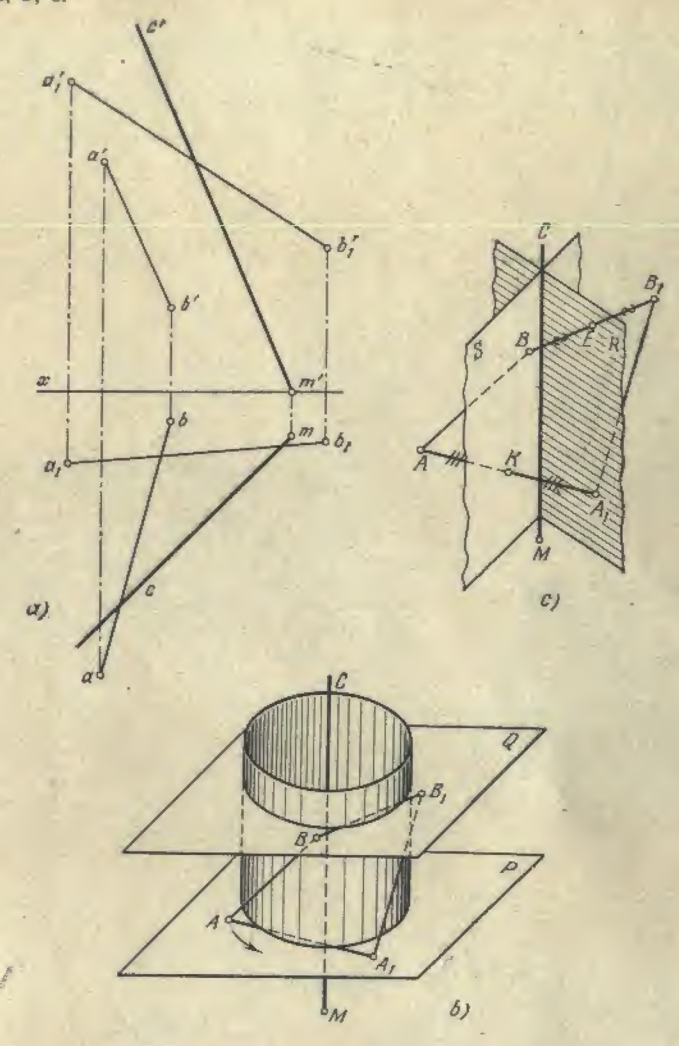
Al resolver el problema no es obligatorio construir la recta EK: el plano Q debe trazarse por el centro entre los planos paralelos S y R, que pasan por las rectas AB y CD respectivamente.

Plan de resolución. 1. Trazar por AB el plano $S \parallel CD$ (o al contrario). 2. Determinar la distancia entre el plano S y el R (el plano R no se necesita para esto). 3. Trazar el plano Q equidistante de los planos S y R y paralelo a ellos. 4. Construir la línea de intersección de los planos P y Q.

326.

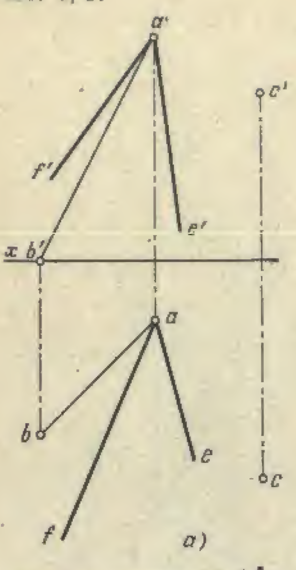


327. a, b, c.



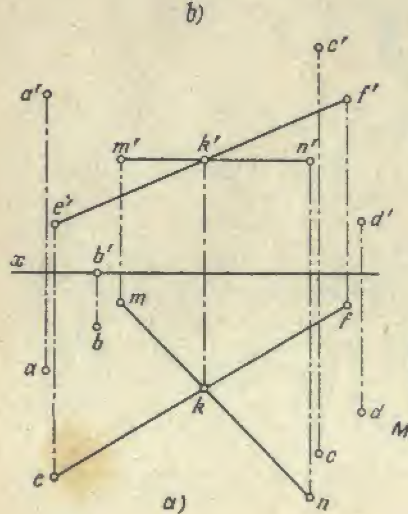
Durante el giro, los puntos A y B giran en los planos P y Q perpendiculares al eje buscado CM (fig. b de la respuesta). La recta CM es equidistante tanto de los puntos A y A_1, como de B y B_1. Por esta razón, ella se determina como la línea de intersección de los planos S y R que pasan respectivamente por los puntos medios de los segmentos AA_1 y BB_1 (fig. c de la respuesta) perpendicularmente a éstos.

328. a, b.

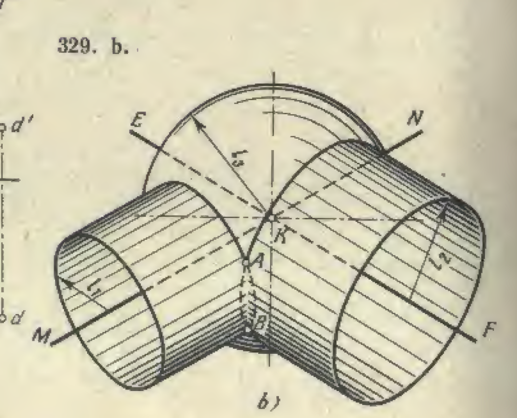


Las rectas buscadas AE y AF son las líneas de intersección de dos superficies cónicas con vértice en el punto A (fig. *b* de la respuesta): una, con el eje AB y el ángulo α de inclinación de las generatrices al eje; la otra, circunscrita a la esfera de radio l con centro en el punto C.

329. a. Los puntos buscados A y B son los puntos de intersección de dos circunferencias (fig. *b* de la respuesta): la circunferencia obtenida en la intersección de la esfera de radio l_3, con centro en el punto K, con el cilindro de radio l_1 y eje MN, y la circunferencia obtenida en la intersección de la misma esfera con un cilindro cuyo eje es la recta EF y cuyo radio es igual a l_2.

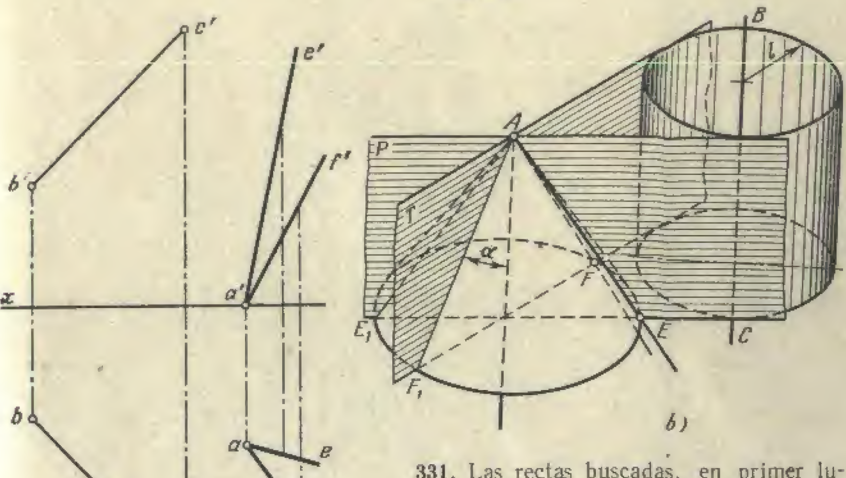


329. b.

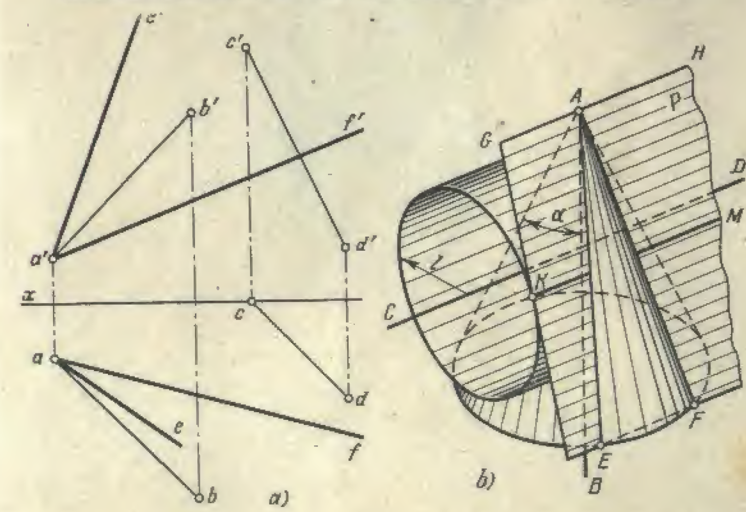


330. a. Las rectas buscadas, en primer lugar, se encuentran en los planos P y T que pasan por el punto A y que son tangentes a la superficie cilíndrica de de radio l y cuyo eje es BC (fig. *b* de la respuesta); en segundo lugar, pertenecen a la superficie cónica cuyo vértice es el punto A, su eje es la recta paralela a BC, y las generatrices de la cual forman con el eje el ángulo α. Las rectas buscadas se obtienen como resultado de la intersección de esta superficie con los planos P y T.

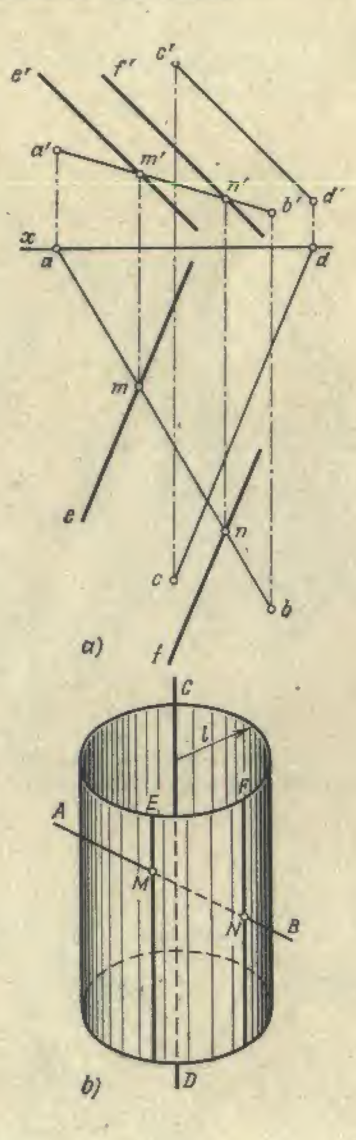
330. b.



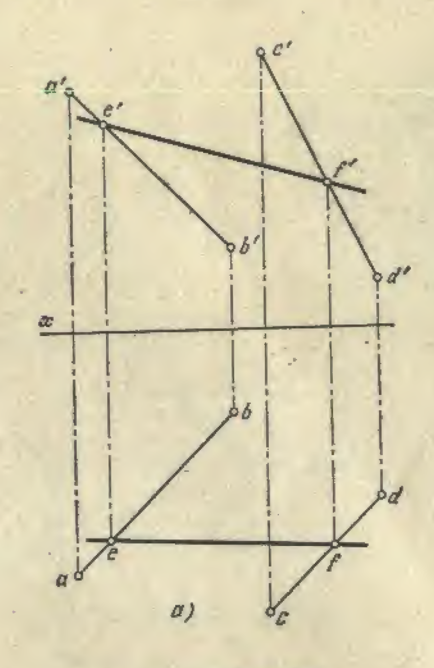
331. Las rectas buscadas, en primer lugar, pertenecen a la superficie cónica (fig. b de la respuesta) cuyo eje es AB y cuyas generatrices forman con el eje un ángulo α; en segundo lugar, al plano P que pasa por el punto A y que es tangente al cilindro, cuyo eje es la recta CD y cuyo radio es igual a l. Por consiguiente, estas rectas se determinan como las líneas de intersección del plano P con la superficie cónica.

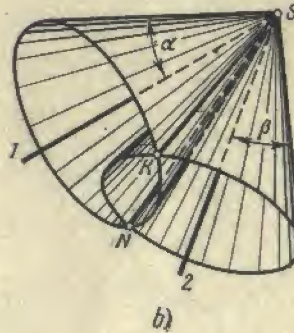


332. Las rectas buscadas son las generatrices del cilindro (fig. *b* de la respuesta), con eje *CD* y radio *l*, que pasan por los puntos de intersección de la recta *AB* con la superficie de este cilindro.

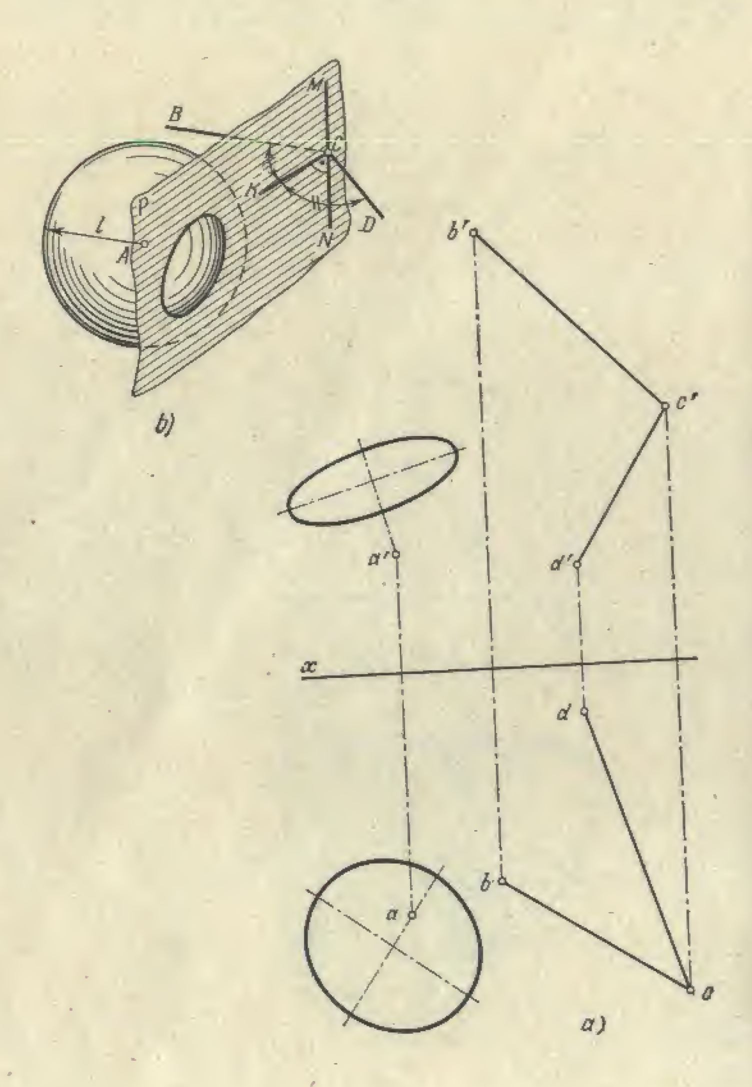


333. Para determinar la dirección de la recta *EF* es necesario (fig. *b* de la respuesta) trazar por un punto arbitrario (*S*) las rectas $S-1 \parallel AB$ y $S-2 \parallel CD$, circunscribir a estas superficies cónicas con los ángulos de inclinación de las generatrices al eje α y β respectivamente, y hallar la línea de su intersección *SK* (*SN*). La recta *EF* es paralela a esta línea. A continuación la resolución del problema es análoga a la resolución del problema 140.

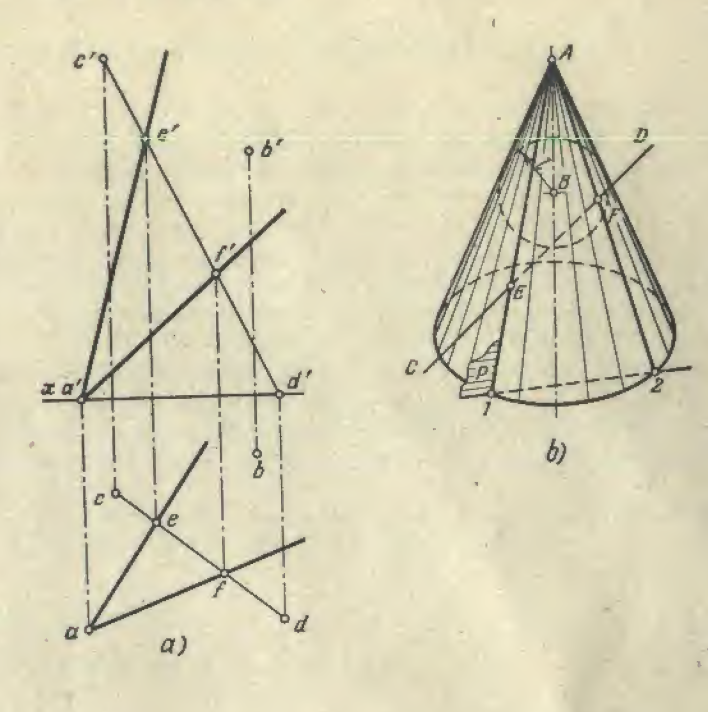




334. El lugar geométrico buscado de los puntos (fig. *b* de la respuesta) es la circunferencia de intersección de la esfera con centro en el punto *A* y de radio *l* con el plano que pasa por la bisectriz del ángulo *BCD* perpendicularmente al plano de este ángulo.



335. Las rectas buscadas son las generatrices de la superficie cónica con vértice en el punto *A*, circunscrita a la esfera con centro en el punto *B* y de radio *l*, que pasan por el punto de intersección de esta superficie con la recta *CD* (fig. *b* de la respuesta).



A NUESTROS LECTORES:

"Mir" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a Editorial "Mir", Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

EN 1975 SE PUBLICAN LOS SIGUIENTES TITULOS DE LA SERIE „LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS":

Kurosch A.

ECUACIONES ALGEBRÁICAS DE GRADOS ARBITRARIOS

Este libro ha sido escrito por Alexandr Kurosch, doctor en ciencias físico-matemáticas, profesor de la Universidad Lomonósov de Moscú, a base de las lecciones que el autor dictara para los participantes de la olimpiada matemática, alumnos de los últimos grados de la secundaria.

En el mismo se traza de acuerdo con el nivel de conocimientos de un alumno de la secundaria, un resumen de los resultados y métodos de la teoría general de las ecuaciones algebráicas. Prácticamente no se presentan demostraciones ya que para ello hubiera sido necesario transcribir casi la mitad del manual de álgebra superior para la universidad. Pero incluso tal condición no hace que la lectura de este libro se convierta en un lugero pasatiempo, ya que toda literatura matemática y entre ella la de popularización exige del lector una gran concentración, el razonamiento de todas las definiciones y enunciados, la comprobación de los cálculos en todos los ejemplos y la aplicación de los métodos examinados a otros casos, propuestos por el mismo lector.

El libro está destinado para los escolares y los estudiantes menores, así como para un amplio círculo de lectores de diferentes especialidades.

Markushévich A.

AREAS Y LOGARITMOS

Este trabajo del vice-presidente de la Academia de Ciencias Pedagógicas de la URSS, doctor en ciencias físico-matemáticas, catedrático Alexey Markushévich, fue enunciado primeramente en la Universidad de Moscú ante los alumnos de grados superiores de la secundaria.

En la obra se expone la teoría geométrica de los logaritmos en la que los últimos aparecen como ciertas áreas. Las propiedades de logaritmos se obtienen del análisis de las propiedades respectivas de las áreas. Junto con esto el libro proporciona las más simples nociones y propiedades del cálculo integral.

No es forzosamente necesario que el lector sepa qué es un logaritmo. No obstante, el lector debe tener conocimientos primarios sobre las funciones y su representación gráfica, progresión geométrica y un límite.

En el caso de que el lector desee obtener la mayor información sobre los logaritmos podría referirse a la obra «Series» del mismo autor.

El libro será útil como libro de lectura para escolares y aquellos lectores que estén interesados por los problemas que en el mismo se exponen.

Shervátov V.

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Este libro contiene la exposición elemental de las así llamadas «funciones hiperbólicas» que, en general, son análogas a las funciones trigonométricas ordinarias. Las funciones hiperbólicas se encuentran en distintas investigaciones físico-técnicas, en particular, desempeñan un papel importante en la geometría no euclidiana de Lobatschevsky. Independientemente de estas aplicaciones la teoría de las funciones hiperbólicas es de gran interés para los escolares y maestros de la secundaria pues la analogía entre las funciones hiperbólicas y trigonométricas permite dar un nuevo enfoque a varios problemas de la trigonometría.

El libro consta de tres capítulos. El primer capítulo está dedicado al giro hiperbólico y su aplicación en el estudio de las propiedades de la hipérbola. En el segundo, se exponen los elementos de la teoría de las funciones hiperbólicas.

El tercer capítulo tiene estrechos vínculos con el libro de A. Markuschévich «Areas y logaritmos» determinando la relación que existe entre la teoría de las funciones hiperbólicas y la de los logaritmos.

Esta obra está dedicada para los escolares y los estudiantes menores de los centros de enseñanza superior.

Shílov G.

ANÁLISIS MATEMÁTICO EN EL INTERVALO DE LAS FUNCIONES RACIONALES

Este libro es una introducción al curso general del Análisis Matemático escrito por el eminente matemático soviético G. Shílov.

Las nociones de derivada e integral, siendo fundamentales para el análisis matemático están muy lejos de ser elementales; en el curso sistemático les preceden la teoría de los límites, la teoría de los números reales y la teoría de las funciones continuas. Tal preparación preliminar es necesaria para formular las nociones de la derivada e integral en una forma bastante generalizada, aplicándolos a un círculo de problemas lo más amplio posible.

Sin embargo, si nos limitamos a una clase relativamente estricta de las funciones racionales y utilizamos la lengua evidente de las gráficas, se puede contar de una manera substanciosa y estricta sobre la derivada e integral casi al mismo tiempo.

Esto se hace en el libro de texto destinado para los escolares y estudiantes menores que no aspiran a especializarse en las matemáticas.

Sominsky I.

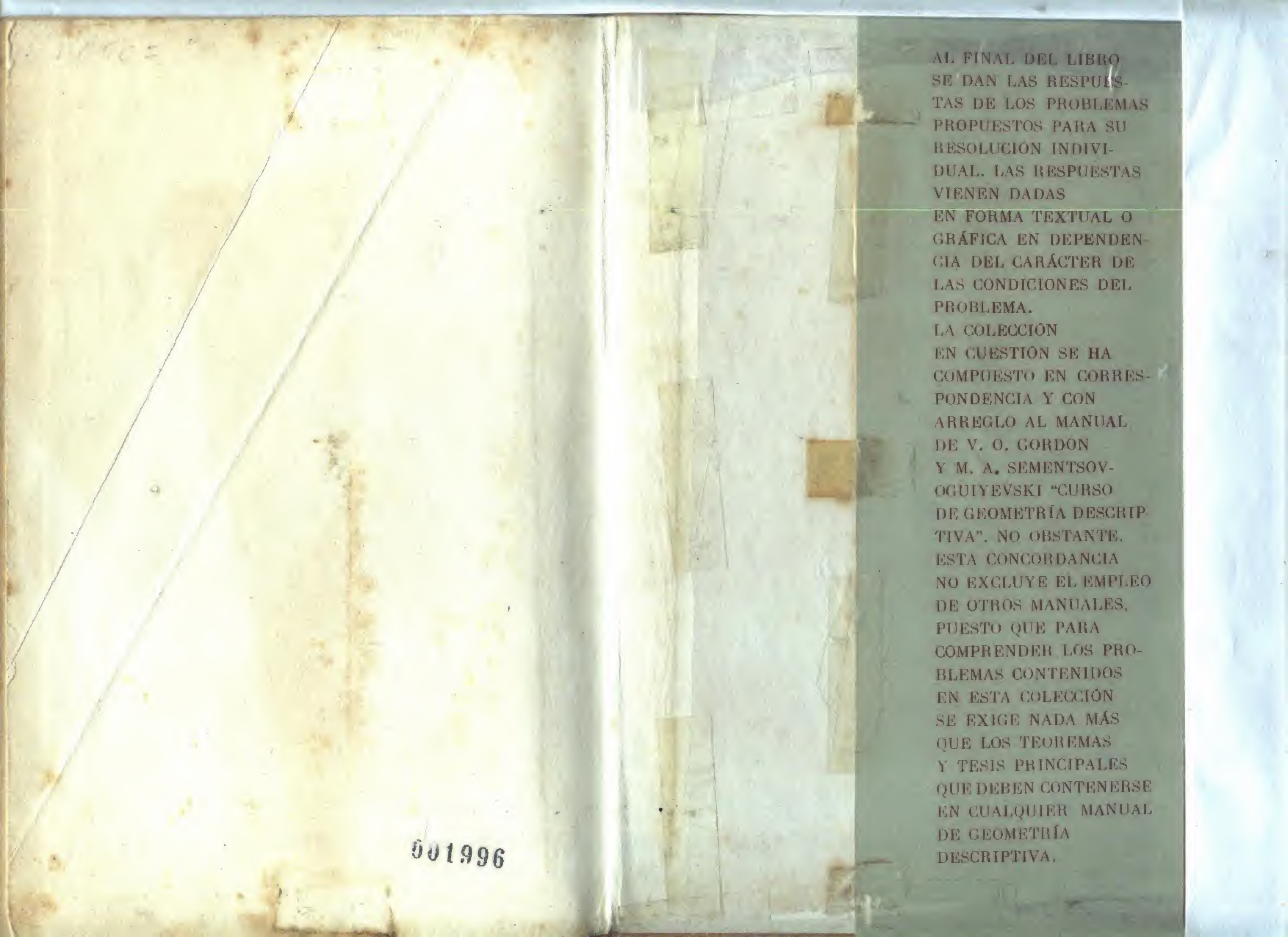
MÉTODO DE LA INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Este libro trata acerca del método de la inducción matemática que es aplicado ampliamente en distintas ramas de las matemáticas, desde el curso de la matemática elemental hasta las más complejas esferas de las investigaciones matemáticas.

Es imposible estudiar las matemáticas sin tener previo conocimiento acerca de este método.

Al mismo tiempo, la idea de la inducción matemática tiene gran importancia para la instrucción general; debido a eso presenta interés para la masa de lectores que no tienen suficiente preparación en la rama de matemáticas.

El libro está dedicado a los escolares de los últimos años de la secundaria. Se recomienda también a los estudiantes menores de los centros de enseñanza superior.



AL FINAL DEL LIBRO SE DAN LAS RESPUESTAS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS PARA SU RESOLUCIÓN INDIVIDUAL. LAS RESPUESTAS VIENEN DADAS EN FORMA TEXTUAL O GRÁFICA EN DEPENDENCIA DEL CARÁCTER DE LAS CONDICIONES DEL PROBLEMA.

LA COLECCIÓN EN CUESTIÓN SE HA COMPUESTO EN CORRESPONDENCIA Y CON ARREGLO AL MANUAL DE V. O. GORDON Y M. A. SEMENTSOV-OGUIYEVSKI "CURSO DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA". NO OBSTANTE, ESTA CONCORDANCIA NO EXCLUYE EL EMPLEO DE OTROS MANUALES, PUESTO QUE PARA COMPRENDER LOS PROBLEMAS CONTENIDOS EN ESTA COLECCIÓN SE EXIGE NADA MÁS QUE LOS TEOREMAS Y TESIS PRINCIPALES QUE DEBEN CONTENERSE EN CUALQUIER MANUAL DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

AL FINAL DEL LIBRO SE DAN LAS RESPUESTAS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS PARA SU RESOLUCIÓN INDIVIDUAL. LAS RESPUESTAS VIENEN DADAS EN FORMA TEXTUAL O GRÁFICA EN DEPENDENCIA DEL CARÁCTER DE LAS CONDICIONES DEL PROBLEMA.

LA COLECCIÓN EN CUESTIÓN SE HA COMPUESTO EN CORRESPONDENCIA Y CON ARREGLO AL MANUAL DE V. O. GORDON Y M. A. SEMENTSOV-OGUIYEVSKI "CURSO DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA". NO OBSTANTE, ESTA CONCORDANCIA NO EXCLUYE EL EMPLEO DE OTROS MANUALES, PUESTO QUE PARA COMPRENDER LOS PROBLEMAS CONTENIDOS EN ESTA COLECCIÓN SE EXIGE NADA MÁS QUE LOS TEOREMAS Y TESIS PRINCIPALES QUE DEBEN CONTENERSE EN CUALQUIER MANUAL DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

EN 1974

LA EDITORIAL "MIR" SEGUIRÁ

PUBLICANDO LA SERIE

De "LECCIONES POPULARES

DE MATEMÁTICAS"

1. Boltiánski V. · ¿Qué es la diferenciación? ·

2. Fomín S. · Sistemas de numeración ·

3. Markushévich A. · Sucesiones convergentes ·

4. Vorobiov N. · Números Fibonacci ·

Rogamos dirijan sus pedidos a las firmas
de su país que se dedican a la venta
de libros y mantienen
relaciones comerciales con V/O "Mezhdunarodnaya
kniga" (Moscú).